ÜBUNGSBUCH

ZUM STUDIUM

DER

HÖHEREN ANALYSIS

VON

DR. OSKAR SCHLÖMILCH,

K. S. GEHEIMER RATH A. D.

ERSTER THEIL:

AUFGABEN AUS DER DIFFERENTIALRECHNUNG.

VIERTE AUFLAGE.

MIT HOLZSCHNITTEN IM TEXTE.

LEIPZIG,

VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1888.

Harvard Fund.
(I.)

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

Vorwort zur ersten Auflage.

In einer zwanzigjährigen Lehrerpraxis hat sich bei mir eine reichhaltige Sammlung grösstentheils neuer Aufgaben und Beispiele aus der höheren Analysis gebildet, deren Veröffentlichung ich hiermit aus zwei Gründen unternehme; einerseits, weil eine beträchtliche Menge von neuem didaktischen Material immerhin willkommen sein wird, andererseits, weil selbst die bekanntesten Werke dieser Richtung sehr empfindliche Lücken zeigen. In der Sohncke'schen Aufgabensammlung z. B. fehlen Untersuchungen über die Convergenz und Divergenz unendlicher Reihen ganz und gar, von Reihenentwickelungen findet man nur die gewöhnlichen, in jedem Lehrbuche stehenden Beispiele, jedoch ohne Angabe der Giltigkeitsgrenzen, die Doppelintegrale sind durch ein einziges Beispiel, dreifache Integrale gar nicht vertreten, die Integration der Differentialgleichungen ist mit völligem Stillschweigen übergangen — kurz, es fehlen gerade diejenigen Partieen, ohne welche man in der Mechanik, mathematischen Physik u. s. w. auch nicht einen Schritt thun kann. Diesen Mängeln dürfte das vorliegende Werkchen abhelfen, jedoch sind dabei die übrigen Theile der Analysis keineswegs stiefmütterlich behandelt worden.

Bei den Aufgaben über die Differentiation entwickelter Functionen einer Variabelen (§§ 2—6) erschien es mir zweckmässig, häufig die verschiedenen, zum Ziele führenden Wege anzudeuten und dadurch dem Studirenden die Mittel zur Controle seiner Rechnung an die Hand zu geben, auch habe ich kleine Rechnungsvortheile bei jeder sich darbietenden Gelegenheit erwähnt. In § 5 findet sich eine Reihe von Fragen, welche den Studirenden zur Uebung in der Transformation cyclometrischer Functionen veranlassen sollen. Die Aufgaben sind übrigens soweit als möglich stufenweis, von leichten zu schwereren fortschreitend, geordnet; bei der ersten Aufgabe jeder Art ist die Lösung etwas ausführlicher gezeigt, bei den übrigen Aufgaben sind nur, wo es nöthig schien, Andeutungen zur

Lösung gegeben. Hier und da wird man auch neue wissenschaftliche Kleinigkeiten finden, wie z. B. in den Abschnitten über isokline Normalen und reciproke Maxima und Minima.

Dem vorliegenden ersten Theile hoffe ich einen zweiten, Aufgaben aus der Integralrechnung enthaltenden Theil rasch folgen zu lassen.

Dresden, am 1. Juli 1868.

Schlömilch.

Vorwort zur zweiten Auflage.

In Folge der durchaus beifälligen Aufnahme, welche dem vorliegenden Werke bei seinem ersten Erscheinen zu Theil geworden ist, habe ich von wesentlichen Aenderungen abgesehen, wohl aber mancherlei Verbesserungen angebracht und eine Reihe neuer Aufgaben hinzugefügt; die letzteren wird man theils in der Einleitung, theils in den Capiteln IV, VIII und X finden.

Dresden, am 1. August 1873.

Schlömilch.

Vorwort zur dritten Auflage.

Auch die vorliegende Auflage unterscheidet sich von ihrer Vorgängerin durch eine Zahl neuer Beispiele und Aufgaben. Unter diesen darf ich wohl den Abschnitt über die „Grenzwerthe der Functionen zweier Variabelen“ (Seite 14) besonders hervorheben, weil dieses Capitel, trotz seiner Eigenthümlichkeiten, bisher noch sehr wenig Beachtung gefunden hat.

Dresden, am 15. Juli 1878.

Schlömilch.

Vorwort zur vierten Auflage.

Da kein Grund zu einer wesentlichen Umgestaltung des Werkes vorlag, so habe ich mich auch bei dieser neuen Ausgabe darauf beschränkt, eine Reihe neuer Beispiele und Aufgaben hinzuzufügen.

Dresden, im October 1887.

Schlömilch.

Inhaltsverzeichniss.

Einleitung.

Capitel I.

Einfache Differentiation von entwickelten Functionen einer Variabelen.

Capitel II.

Mehrfache Differentiationen von entwickelten Functionen einer Variabelen.

Capitel III.

Differentiation von Gleichungen zwischen mehreren Variabelen.

Capitel IV.

Die Discussion ebener Curven.

Capitel V.

Aufgaben über geometrische Orte.

Capitel VI.

Die Discussion doppelt gekrümmter Curven.

Capitel VII.

Die Discussion der Flächen.

Capitel VIII.

Einhüllende Curven und Flächen.

Capitel IX.

Bestimmung der Werthe vieldeutiger Ausdrücke.

Capitel X.

Maxima und Minima der Functionen.

Capitel XI.

Unendliche Reihen.

Capitel XII.

Functionen und Reihen mit complexen Variabelen.

Einleitung.

Grenzwerthe von Functionen einer Variabelen.

I. Um den Grenzwerth zu ermitteln, welchem sich eine Function $f(x)$ in dem Falle nähert, wo an die Stelle von x eine über jede bestimmte Grösse hinaus wachsende Zahl ω gesetzt wird, reicht in vielen Fällen eine blosse Transformation von $f(x)$ hin. Die folgenden Aufgaben werden dies zeigen.

Aufgabe 1. Es soll $Lim\,(\sqrt{\omega+\alpha}-\sqrt{\omega})$ für ein constantes α bestimmt werden.

Wollte man ohne Weiteres $\omega = \infty$ setzen, so würde man den nichtssagenden Ausdruck $\infty - \infty$ erhalten; betrachtet man aber die gegebene Function als einen Bruch mit dem Nenner 1 und multiplicirt Zähler und Nenner mit $\sqrt{\omega+\alpha}+\sqrt{\omega}$, so führt die nunmehrige Gleichung

$$\sqrt{\omega+\alpha}-\sqrt{\omega}=\frac{\alpha}{\sqrt{\omega+\alpha}+\sqrt{\omega}}$$

zu dem Resultate

$$Lim\,(\sqrt{\omega+\alpha}-\sqrt{\omega})=0.$$

Aufgabe 2. Man sucht $Lim\,[\sqrt{\omega(\omega+\alpha)}-\omega]$.

Durch ein dem vorigen ganz ähnliches Verfahren ergiebt sich zunächst

$$\sqrt{\omega(\omega+\alpha)}-\omega=\frac{\alpha}{\sqrt{1+\frac{\alpha}{\omega}}+1}$$

und hieraus

$$Lim\,[\sqrt{\omega(\omega+\alpha)}-\omega]=\tfrac{1}{2}\alpha.$$

Bemerkung. In älteren Werken findet man häufig die Behauptung, dass eine endliche Grösse gegen eine unendlich wachsende Zahl verschwinde und dass mithin $\omega + \alpha$ durch ω zu ersetzen sei. Die Unrichtigkeit dieser Schlussweise zeigt sich an den obigen zwei Aufgaben, denn nach jener Weglassungsregel erhält man zwar bei Nr. 1 das richtige Resultat $\sqrt{\omega} - \sqrt{\omega} = 0$, bei Nr. 2 aber das falsche Resultat $\omega - \omega = 0$.

Ebenso ungerechtfertigt ist die nicht selten von ungenauen Schriftstellern benutzte Gleichung $\frac{1}{\infty} = 0$. Der Quotient $\frac{1}{\omega}$ wird nämlich unter keinen Umständen gleich der Null, vielmehr bildet letztere nur den idealen Grenzwerth, welchem sich $\frac{1}{\omega}$ asymptotisch nähert.

Aufgabe 3. Nach demselben Verfahren ist die Gleichung

$$Lim\, [\sqrt{(\omega + \alpha)\ (\omega + \beta)} - \omega] = \tfrac{1}{2} (\alpha + \beta)$$

zu beweisen.

Aufgabe 4. Es soll

$$Lim\, \frac{l(\alpha + \beta e^{\omega})}{\omega}$$

bestimmt werden, worin e die Grundzahl der natürlichen Logarithmen bezeichnet.

Unter Berücksichtigung der Identität

$$\alpha + \beta e^{\omega} = e^{\omega} (\alpha e^{-\omega} + \beta)$$

erhält man

$$Lim\, \frac{l(\alpha + \beta e^{\omega})}{\omega} = Lim \left\{ 1 + \frac{l(\alpha e^{-\omega} + \beta)}{\omega} \right\} = 1.$$

Aufgabe 5. Man sucht den Grenzwerth

$$Lim \left\{ l(\alpha + \beta e^{\omega}) \cdot l \left(1 + \frac{1}{\omega}\right) \right\}.$$

Derselbe ist identisch mit

$$Lim \left\{ \frac{l(\alpha + \beta e^{\omega})}{\omega} \cdot l \left[\left(1 + \frac{1}{\omega}\right)^{\omega} \right] \right\} = 1.$$

II. Eine zu Grenzbestimmungen häufig anwendbare Methode besteht darin, dass man die veränderliche Grösse V, deren Grenzwerth gesucht wird, zwischen zwei Variabeln U und W einschliesst, von denen die eine kleiner, die andere grösser als V ist, dass man also eine Ungleichung von der Form

$$U < V < W$$

aufstellt. Bezeichnet ε einen nicht näher bestimmten positiven echten Bruch, so kann die vorstehende Ungleichung auch durch die Gleichung

$$V = U + \varepsilon\,(W - U)$$

ersetzt werden. Falls nun U und W sich einer gemeinschaftlichen Grenze K nähern, convergirt $W - U$ gegen den Werth $K - K = 0$ und dann ergiebt sich

$$Lim\, V = K.$$

Der Anwendung dieses Verfahrens schicken wir einen vielfach brauchbaren Hilfssatz voraus. In der identischen Gleichung

$$\frac{b^m - a^m}{b - a} = b^{m-1} + b^{m-2}\,a + b^{m-3}\,a^2 + \ldots + b\,a^{m-2} + a^{m-1}$$

sei m selbstverständlich eine ganz positive Zahl und $0 < a < b$; die rechte Seite erhält dann einen zu kleinen Werth, wenn man jedes b durch das kleinere a ersetzt, sie wird dagegen zu gross, wenn für jedes a das grössere b geschrieben wird; es ist daher

$$\alpha)\qquad m\,a^{m-1} < \frac{b^m - a^m}{b - a} < m\,b^{m-1}.$$

Bezeichnen ferner p und q ganze positive Zahlen und x eine positive die Einheit übersteigende Grösse, so hat man nach dem Vorigen

$$\frac{x^q - 1}{x - 1} < q\,x^{q-1}$$

und um so mehr

$$\frac{x^q - 1}{x - 1} < q\,x^q,\quad \frac{x^q - 1}{x - 1} < q\,x^{q+1},\quad \frac{x^q - 1}{x - 1} < q\,x^{q+2},\ldots$$

$$\frac{x^q - 1}{x - 1} < q\,x^{p-1},$$

wobei selbstverständlich $p > q$ sein muss. Die Addition dieser Ungleichungen liefert

$$(p - q)\,\frac{x^q - 1}{x - 1} < q\,x^q\,\frac{x^{p-q} - 1}{x - 1} \text{ oder } \frac{p}{q} < \frac{x^p - 1}{x^q - 1};$$

für $x = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{q}}$ wird hieraus

$$\frac{p}{q}\,a^{\frac{p}{q}-1} < \frac{b^{\frac{p}{q}} - a^{\frac{p}{q}}}{b - a},\quad b > a,\quad p > q.$$

Bezeichnet dagegen y einen positiven echten Bruch, so hat man analog

$$\frac{1-y^q}{1-y} > q y^q, \quad \frac{1-y^q}{1-y} > q y^{q+1}, \ldots \frac{1-y^q}{1-y} > q y^{p-1},$$

mithin durch Addition und für $y = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{q}}$

$$\frac{p}{q} b^{\frac{p}{q}-1} > \frac{b^{\frac{p}{q}} - a^{\frac{p}{q}}}{b-a}, \quad b > a, \; p > q.$$

Die beiden gefundenen Ungleichungen lassen sich für $\frac{p}{q} = \varkappa$ folgendermassen zusammenziehen

$$\beta) \qquad \varkappa a^{\varkappa - 1} < \frac{b^\varkappa - a^\varkappa}{b-a} < \varkappa b^{\varkappa - 1}, \quad b > a, \quad \varkappa > 1.$$

Für $\varkappa = \frac{1}{\lambda}$, $a = A^\lambda$, $b = B^\lambda$ wird hieraus

$$\frac{1}{\lambda} A^{1-\lambda} < \frac{B-A}{B^\lambda - A^\lambda} < \frac{1}{\lambda} B^{1-\lambda}, \quad B > A, \quad \lambda < 1$$

oder, wenn man die reciproken Werthe nimmt und der Gleichförmigkeit wegen A und B durch a und b ersetzt,

$$\gamma) \qquad \lambda a^{\lambda - 1} > \frac{b^\lambda - a^\lambda}{b-a} > \lambda b^{\lambda - 1}, \quad b > a, \quad 0 < \lambda < 1.$$

Die Ungleichungen α), β) γ) liefern zusammen den Satz, dass bei positiven μ der Quotient

$$\frac{b^\mu - a^\mu}{b-a}$$

immer zwischen $\mu a^{\mu - 1}$ und $\mu b^{\mu - 1}$ enthalten ist.

Aufgabe 6. Man sucht den Grenzwerth von

$$\sqrt[3]{(\omega + \alpha)\,(\omega + \beta)\,(\omega + \gamma)} - \omega.$$

Setzt man in der vorigen Ungleichung $\lambda = \frac{1}{3}$.

$$a = \omega^3, \quad b = (\omega + \alpha)\,(\omega + \beta)\,(\omega + \gamma)$$

und zur Abkürzung

$$\frac{b}{a} = \left(1 + \frac{\alpha}{\omega}\right)\left(1 + \frac{\beta}{\omega}\right)\left(1 + \frac{\gamma}{\omega}\right) = R, \text{ mithin } b = aR$$

so erhält man

$$\frac{1}{3\,\omega^2 \sqrt[3]{R^2}} < \frac{\sqrt[3]{(\omega + \alpha)\,(\omega + \beta)\,(\omega + \gamma)} - \omega}{(\alpha + \beta + \gamma)\,\omega^2 + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)\,\omega + \alpha\beta\gamma} < \frac{1}{3\,\omega^2}$$

oder

$$\frac{1}{3\sqrt[3]{R^2}}\left\{\alpha+\beta+\gamma+\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\omega}+\frac{\alpha\beta\gamma}{\omega^2}\right\}$$
$$<\sqrt[3]{(\omega+\alpha)(\omega+\beta)(\omega+\gamma)}-\omega<$$
$$\tfrac{1}{3}\left\{\alpha+\beta+\gamma+\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\omega}+\frac{\alpha\beta\gamma}{\omega^2}\right\}.$$

Wegen $Lim\, R = 1$ folgt nun

$$Lim\left\{\sqrt[3]{(\omega+\alpha)(\omega+\beta)(\omega+\gamma)}-\omega\right\}=\tfrac{1}{3}(\alpha+\beta+\gamma).$$

Aufgabe 7. Unter der Voraussetzung, dass $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \mu$ endliche Grössen sind und n deren Anzahl bedeutet, ist nach der vorigen Methode die allgemeine Gleichung abzuleiten

$$Lim\left\{\sqrt[n]{(\omega+\alpha)(\omega+\beta)\ldots(\omega+\mu)}-\omega\right\}=\frac{\alpha+\beta+\ldots+\mu}{n}.$$

III. Ein drittes Verfahren zur Ermittelung von Grenzwerthen besteht darin, dass man eine neue Variabele einführt und damit die gegebene Function auf eine andere Form bringt, deren Grenzwerth bekannt ist.

Aufgabe 8. Für ein constantes α soll

$$Lim\left\{\left(1+\frac{\alpha}{\omega}\right)^{\omega}\right\}$$

ermittelt werden.

Setzt man $\frac{\omega}{\alpha}=\tau$, wo τ eine gleichzeitig mit ω unendlich wachsende Zahl bedeutet, so hat man identisch

$$\left(1+\frac{\alpha}{\omega}\right)^{\omega}=\left[\left(1+\frac{1}{\tau}\right)^{\tau}\right]^{\alpha}$$

mithin, weil $\left(1+\frac{1}{\tau}\right)^{\tau}$ gegen die Grenze e convergirt,

$$Lim\left\{\left(1+\frac{\alpha}{\omega}\right)\right\}=e^{\alpha}.$$

Aufgabe 9. Man verlangt den Werth von

$$Lim\left(\omega \sin\frac{\alpha}{\omega}\right).$$

Für $\frac{\alpha}{\omega}=\vartheta$, wo nun ϑ gegen die Null convergirt, ist

$$\omega\sin\frac{\alpha}{\omega}=\alpha\frac{\sin\vartheta}{\vartheta}$$

mithin

$$Lim\left(\omega\sin\frac{\alpha}{\omega}\right)=\alpha.$$

Aufgabe 10. Auf ähnliche Art sind die Formeln

$$Lim\left\{\omega\left(1-cos\frac{\alpha}{\omega}\right)\right\}=0,\quad Lim\left\{\omega^2\left(1-cos\frac{\alpha}{\omega}\right)\right\}=\tfrac{1}{2}\alpha^2$$

zu beweisen.

Aufgabe 11. Man verlangt den Werth von

$$Lim\left\{\left(cos\frac{\alpha}{\omega}\right)^{\omega}\right\}.$$

Wird $sin^2\frac{\alpha}{\omega}=\frac{1}{\tau}$ gesetzt, so ergiebt sich

$$Lim\left\{\left(cos\frac{\alpha}{\omega}\right)^{\omega}\right\}=Lim\left\{\left[\left(1-\frac{1}{\tau}\right)^{\tau}\right]^{\frac{1}{2}\left(\omega\, sin\frac{\alpha}{\omega}\right)sin\frac{\alpha}{\omega}}\right\}=1.$$

Aufgabe 12. Auf ähnliche Art ist die Formel

$$Lim\left\{\left(cos\frac{\alpha}{\omega}\right)^{\omega^2}\right\}=e^{-\frac{1}{2}\alpha^2}$$

zu beweisen.

Aufgabe 13. Man sucht den Werth von

$$Lim\left\{\left(1+\varkappa\, tan\frac{\alpha}{\omega}\right)^{\omega}\right\}.$$

Wird $tan\frac{\alpha}{\omega}=\frac{1}{\tau}$ gesetzt, so ergiebt sich

$$Lim\left\{\left(1+\varkappa\, tan\frac{\alpha}{\omega}\right)^{\omega}\right\}=Lim\left\{\left[\left(1+\frac{\varkappa}{\tau}\right)^{\tau}\right]^{\omega\, sin\frac{\alpha}{\omega}\, sec\frac{\alpha}{\omega}}\right\}=e^{\varkappa\alpha}.$$

Aufgabe 14. Mittelst der Formeln in Nr. 11 und 13 soll die Gleichung

$$Lim\left\{\left(cos\frac{\alpha}{\omega}+\varkappa\, sin\frac{\alpha}{\omega}\right)^{\omega}\right\}=e^{\varkappa\alpha}$$

bewiesen werden.

IV. Grenzwerthe von Summen. Wenn eine Function $f(x)$ oder kurz X sich der Grenze A nähert, wenn demnach die Differenz $X-A$ gegen die Null convergirt, so kann man $X=A+\delta$ setzen, wo δ zwar nicht näher bekannt ist, jedenfalls aber beim Grenzenübergange verschwinden muss. Auf mehrere Functionen $X_1, X_2, \dots X_n$ angewendet, führt diese Bemerkung zu der Gleichung

$$\begin{aligned}&X_1+X_2+X_3+\dots+X_n\\=&A_1+A_2+A_3+\dots+A_n\\+&\delta_1+\delta_2+\delta_3+\dots+\delta_n.\end{aligned}$$

Falls nun n eine endliche Zahl ist und es auch beim Grenzenübergange bleibt, erhellt leicht, dass die Summe $\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_n$ sich der Null nähert; man hat dann

$$Lim\,(X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n)$$
$$= A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n$$

d. h. der Grenzwerth einer Summe ist gleich der Summe der Grenzwerthe der einzelnen Summanden. Wenn dagegen n entweder von Hause aus unendlich ist oder es durch den Grenzenübergang wird, so kann es geschehen, dass in der Summe $\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_n$ die Abnahme der einzelnen Glieder durch den fortwährenden Zuwachs von Gliedern ausgeglichen wird, dass also die genannte Summe nicht gegen die Null convergirt; dann ist es aber auch falsch, den Grenzwerth einer Summe durch Summirung der Grenzwerthe der einzelnen Summanden bestimmen zu wollen. Die folgenden Aufgaben gehören sämmtlich dem zweiten Falle an.

Aufgabe 15. Man sucht den Grenzwerth von

$$S_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \ldots + \frac{n}{n^2}$$

für ein unendlich wachsendes n.

Jeder einzelne Summand convergirt gegen die Null, die Summe aber nicht; man hat nämlich

$$Lim\,S_n = Lim \left\{ \tfrac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right\} = \tfrac{1}{2}.$$

Aufgabe 16. Für $n = \infty$ soll der Grenzwerth von

$$T_n = \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2}{n^3}$$

bestimmt werden.

Auf ähnliche Weise wie vorhin findet man

$$Lim\,T_n = \tfrac{1}{3}.$$

Aufgabe 17. Den Grenzwerth von

$$U_n = \frac{1^\mu + 2^\mu + 3^\mu + \ldots + n^\mu}{n^{\mu+1}}$$

für ein beliebiges μ und $n = \infty$ zu bestimmen.

Da es keine, für jedes μ giltige Summenformel für $1^\mu + \ldots + n^\mu$ giebt, so hilft man sich damit, dass man die Summe zwischen zwei einschliessende Zahlen bringt. Aus der Ungleichung III, β ergiebt sich nämlich, wenn das eine Mal $a = m$, $b = m + 1$, das andere Mal $a = m - 1$, $b = m$ genommen wird,

$$\varkappa m^{\varkappa - 1} < (m+1)^{\varkappa} - m^{\varkappa}, \quad m^{\varkappa} - (m-1)^{\varkappa} < \varkappa m^{\varkappa - 1}, \quad (\varkappa > 1)$$

d. h. zusammen und für $\varkappa = \mu + 1$

$$\frac{m^{\mu+1} - (m-1)^{\mu+1}}{\mu + 1} < m^{\mu} < \frac{(m+1)^{\mu+1} - m^{\mu+1}}{\mu+1}, \quad \mu > 0.$$

Addirt man alle für $m = 1, 2, 3, \ldots n$ hieraus entspringenden Ungleichungen und dividirt mit $n^{\mu+1}$, so findet man

$$Lim\, U_n = \frac{1}{\mu+1}, \quad \mu > 0.$$

Aus der Ungleichung III, γ erhält man durch ein ähnliches Verfahren

$$\frac{(m+1)^{\mu+1} - m^{\mu+1}}{\mu+1} < m^{\mu} < \frac{m^{\mu+1} - (m-1)^{\mu+1}}{\mu+1}, \quad \mu < 0$$

und hieraus

$$Lim\, U_n = \frac{1}{\mu+1}, \quad \mu > -1$$

$$Lim\, U_n = \infty, \quad \mu < -1.$$

Aufgabe 18. Man sucht den Grenzwerth von

$$R_n = \frac{1}{n\alpha} + \frac{1}{n\alpha + \beta} + \frac{1}{n\alpha + 2\beta} + \frac{1}{n\alpha + 3\beta} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{n\alpha + (n-1)\beta}$$

für den Fall $n = \infty$.

Aus der für $a < b$ geltenden Ungleichung

$$b^m - a^m > m(b-a)\, a^{m-1}$$

erhält man für $a = 1$, $b = 1 + \frac{z}{m}$ und durch Uebergang zur Grenze für unendlich wachsende m

$$e^z - 1 > z \text{ oder } e^z > 1 + z.$$

Auf ähnliche Weise findet man mittelst der Ungleichung

$$b^m - a^m < m(b-a)\, b^{m-1}$$

für $a = 1 - \frac{z}{m}$, $b = 1$,

$$1 - e^{-z} < z \text{ oder } e^{-z} > 1 - z$$

und umgekehrt, wenn z ein positiver echter Bruch ist,

$$e^z < \frac{1}{1-z}.$$

Nimmt man von beiden Ungleichungen die Logarithmen, so hat man

$$l(1+z) < z < l\left(\frac{1}{1-z}\right), \quad (0 < z < 1).$$

Man ertheile nun dem z der Reihe nach die Werthe

$$\frac{\beta}{n\alpha}, \quad \frac{\beta}{n\alpha+\beta}, \quad \frac{\beta}{n\alpha+2\beta}, \ldots \frac{\beta}{n\alpha+(n-1)\beta}$$

und addire alle entstehenden Ungleichungen; für $n=\infty$ ergiebt sich dann

$$Lim\, R_n = \frac{l(\alpha+\beta)-l\alpha}{\beta},$$

wobei α und β positiv sein müssen.

Aufgabe 19. Unter der Voraussetzung eines positiven echt gebrochenen α soll der Grenzwerth von

$$S_n = \left(\alpha+\beta\frac{\sqrt{1}}{n}\right)^2 + \left(\alpha^2+\beta\frac{\sqrt{2}}{n}\right)^2 + \left(\alpha^3+\beta\frac{\sqrt{3}}{n}\right)^2 + \ldots$$
$$\ldots + \left(\alpha^n+\beta\frac{\sqrt{n}}{n}\right)^2$$

für $n=\infty$ bestimmt werden.

Die einzelnen Summanden nähern sich den Grenzen α^2, α^4, α^6 etc., doch ist $Lim\, S_n$ nicht $=\alpha^2+\alpha^4+\alpha^6+\ldots$ Nach Auflösung der Parenthesen ergiebt sich vielmehr

$$S_n = \frac{\alpha^2(1-\alpha^{2n})}{1-\alpha^2} + 2\frac{s_n\beta}{n} + \tfrac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\beta^2,$$

wobei zur Abkürzung gesetzt wurde

$$s_n = \sqrt{1}\cdot\alpha + \sqrt{2}\cdot\alpha^2 + \sqrt{3}\cdot\alpha^3 + \cdots + \sqrt{n}\cdot\alpha^n.$$

Die Summe dieser Reihe ist positiv und kleiner als

$$\sqrt{n}\,(\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\cdots+\alpha^n)$$

mithin

$$0 < s_n < \sqrt{n}\,.\,\frac{\alpha(1-\alpha^n)}{1+\alpha} \text{ daher } 0 < \frac{s_n}{n} < \frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{\alpha(1-\alpha^n)}{1-\alpha}.$$

Für $n=\infty$ folgt nun wegen $Lim\,(\alpha^n)=0$

$$Lim\, S_n = \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2} + \frac{\beta^2}{2}.$$

Aufgabe 20. Man sucht den Grenzwerth von

$$S_n = \sqrt{\alpha+\frac{\beta}{n}} + \sqrt{\alpha^2+\frac{\beta}{n}} + \sqrt{\alpha^3+\frac{\beta}{n}} + \ldots \sqrt{\alpha^n+\frac{\beta}{n}},$$

worin α einen positiven echten Bruch, β eine beliebige positive Constante bedeutet und alle Wurzeln absolut genommen werden sollen.

Die Grenzwerthe der einzelnen Summanden sind $\sqrt{\alpha}$, $(\sqrt{\alpha})^2$, $(\sqrt{\alpha})^3$ etc., dagegen ist $Lim\, S_n$ keineswegs

$$=\sqrt{\alpha}+(\sqrt{\alpha})^2+(\sqrt{\alpha})^3+\cdots=\frac{\sqrt{\alpha}}{1-\sqrt{\alpha}}.$$

Zufolge der Bemerkung

$$\sqrt{\alpha^k+\frac{\beta}{n}}>\sqrt{\frac{\beta}{n}}$$

ist $S_n>\sqrt{n\beta}$ und daraus ergiebt sich, dass S_n gleichzeitig mit n über alle Grenzen wächst.

Aufgabe 21. Unter denselben Bedingungen wie vorhin sucht man den Grenzwerth von

$$S_n=\sqrt{\alpha+\frac{\beta}{1n}}+\sqrt{\alpha^2+\frac{\beta}{2n}}+\sqrt{\alpha^3+\frac{\beta}{3n}}+\cdots+\sqrt{\alpha^n+\frac{\beta}{nn}}.$$

Benutzt man die für positive a und b leicht einzusehenden Ungleichungen

$$\sqrt{a^2+b^2}<a+b,$$
$$\sqrt{a^2+b^2}>a+b-\sqrt{ab},$$

und setzt zur Abkürzung

$$U_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

$$V_n=\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\left(\sqrt[4]{\frac{\alpha}{1}}+\sqrt[4]{\frac{\alpha^2}{2}}+\cdots+\sqrt[4]{\frac{\alpha^n}{n}}\right),$$

so erhält man

$$S_n<\sqrt{\alpha}\cdot\frac{1-(\sqrt{\alpha})^n}{1-\sqrt{\alpha}}+\sqrt{\beta}\cdot U_n,$$

$$S_n>\sqrt{\alpha}\cdot\frac{1-(\sqrt{\alpha})^n}{1-\sqrt{\alpha}}+\sqrt{\beta}\cdot U_n-\sqrt[4]{\beta}\cdot V_n.$$

Der Grenzwerth von U_n findet sich aus Aufg. 17 für $\mu=-\frac{1}{2}$; weil ferner

$$0<V_n<\sqrt[4]{\frac{\alpha}{n}}\cdot\frac{1-(\sqrt[4]{\alpha})^n}{1-\sqrt[4]{\alpha}}$$

ist, folgt $Lim\, V_n=0$ daher zusammen

$$Lim\, S_n=\frac{\sqrt{\alpha}}{1-\sqrt{\alpha}}+2\sqrt{\beta}.$$

Aufgabe 22. Man verlangt den Grenzwerth von

$$S_n = \sqrt{\left(\frac{\alpha}{1\cdot 2}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{n}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2\cdot 3}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{n}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha}{3\cdot 4}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{n}\right)^2} + \cdots$$
$$\cdots + \sqrt{\left(\frac{\alpha}{n(n+1)}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{n}\right)^2},$$

worin alle Wurzeln positiv genommen werden sollen.

Mit Hülfe der in Aufg. 21 erwähnten Ungleichungen und der Zerlegung

$$\frac{1}{x(x+1} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$$

findet man

$$S_n < \alpha\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \beta,$$
$$S_n > \alpha\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \beta - \sqrt{\alpha\beta}\,\frac{s_n}{\sqrt{n}},$$

worin zur Abkürzung gesetzt wurde

$$s_n = \frac{1}{\sqrt{1\cdot 2}} + \frac{1}{\sqrt{2\cdot 3}} + \frac{1}{\sqrt{3\cdot 4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}.$$

Um $Lim\,(s_n : \sqrt{n})$ zu ermitteln, vergleiche man zunächst s_n mit der Summe

$$\sigma_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Man erhält leicht

$$s_n < \sigma_n \quad \text{und} \quad s_n > \sigma_n - 1 + \frac{1}{n+1}$$

also zusammen und durch Division mit $\sqrt{n}$

$$\frac{\sigma_n}{\sqrt{n}} - \frac{\sqrt{n}}{n+1} < \frac{s_n}{\sqrt{n}} < \frac{\sigma_n}{\sqrt{n}}.$$

Convergirt nun $\sigma_n : \sqrt{n}$ gegen einen bestimmten Grenzwerth λ, so nähert sich $s_n : \sqrt{n}$ derselben Grenze.

Zufolge der Gleichung

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n + \frac{1}{n+1}$$

hat man weiter

$$\frac{\sigma_n}{\sqrt{n}} - \frac{\sigma_{n+1}}{\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{(nn+1)}}\,\sigma_n - \frac{1}{\sqrt{(n+1)^3}},$$

und durch Anwendung der Relation

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n} > \frac{1}{2\sqrt{n+1}}$$

gelangt man zu der Ungleichung

$$\frac{\sigma_n}{\sqrt{n}} - \frac{\sigma_{n+1}}{\sqrt{n+1}} > \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}}\left\{\frac{\sigma_n}{2} - \sqrt{\frac{n}{n+1}}\right\}.$$

Es ist nun $\sigma_4 = \frac{25}{12}$ mithin $\frac{1}{2}\sigma_4 > 1$ und für $n > 4$ um so mehr $\frac{1}{2}\sigma_n > 1$, daher die rechte Seite positiv und deshalb

$$\frac{\sigma_n}{\sqrt{n}} > \frac{\sigma_{n+1}}{\sqrt{n+1}},$$

woraus nach einander folgt

$$\frac{\sigma_4}{\sqrt{4}} > \frac{\sigma_5}{\sqrt{5}} > \frac{\sigma_6}{\sqrt{6}} > \frac{\sigma_7}{\sqrt{7}} > \cdots$$

Der Quotient $\sigma_n : \sqrt{n}$ nimmt also von $n = 4$ bis $n = \infty$ unausgesetzt ab; da er aber nicht negativ werden kann, so muss er gegen eine gewisse Grenze λ convergiren, die $\geqq 0$ ist.

Beachtet man, dass sich die rechte Seite der Gleichung

$$\sigma_{2n} - \sigma_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots - \frac{1}{2n}$$

unter den Formen

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{5\cdot 6} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)\,2n}$$

und

$$1 - \frac{1}{2\cdot 3} - \frac{1}{4\cdot 5} - \cdots - \frac{1}{(2n-2)(2n-1)} - \frac{1}{2n}$$

darstellen lässt, so hat man

$$\frac{1}{2} < \sigma_{2n} - \sigma_n < 1$$

und durch Division mit $\sqrt{n}$

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{2}\cdot\frac{\sigma_{2n}}{\sqrt{2n}} - \frac{\sigma_n}{\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}};$$

der Uebergang zur Grenze für $n = \infty$ giebt

$$\sqrt{2}\cdot\lambda - \lambda = 0 \quad \text{mithin} \quad \lambda = 0.$$

Alles zusammen ist nun

$$Lim\, S_n = \alpha + \beta.$$

Aufgabe 23. Es soll der Grenzwerth von

$$U_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - l\,n$$

untersucht werden.

Aus der früher bewiesenen Ungleichung $z > l\,(1+z)$ erhält man für $z = \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots \frac{1}{n}$ und durch Addition der entstehenden Specialfälle

$$U_n > l\left(1 + \frac{1}{n}\right);$$

es ist also U_n immer positiv.

Man hat ferner

$$U_n - U_{n+1} = l\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1},$$

oder wenn die Ungleichung $l\left(\frac{1}{1-z}\right) > z$ für $z = \frac{1}{n+1}$ benutzt wird,

$$U_n - U_{n+1} > 0, \quad U_n > U_{n+1},$$

$$U_1 > U_2 > U_3 > U_4 > \cdots$$

Bei wachsenden n nimmt also U_n fortwährend ab, kann aber nach dem Vorigen nicht negativ werden und muss folglich gegen eine bestimmte Grenze $\mu \geqq 0$ convergiren.

Auf analoge Weise findet man, dass der Ausdruck

$$V_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - l\,(n+1)$$

von seinem Anfangswerthe $V_1 = 1 - l\,2 = 0{,}307 \cdots$ an fortwährend zunimmt.

Weil endlich

$$Lim\,(U_n - V_n) = Lim\, l\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 0$$

ist, so convergiren U_n und V_n gegen die gemeinschaftliche Grenze μ und zwar U_n durch Abnahme, V_n durch Zunahme. Demnach liegt μ zwischen zwei zusammengehörigen Werthen von U_n und V_n, z. B. zwischen $U_{20} = 0{,}60201\ldots$ und $V_{20} = 0{,}55322\ldots$, so dass näherungsweise $\mu = \frac{1}{2}\,(U_{20} + V_{20}) = 0{,}577\ldots$ sein muss.

Mit Hülfe der Integralrechnung findet man den genauen Werth $\mu = 0{,}57721566\ldots$ (s. II. Thl., § 23, Nr. 8).

V. Grenzwerthe von Producten führt man leicht auf Grenzwerthe von Summen zurück, indem man vorerst den Logarithmus des Productes untersucht. Daraus folgt, dass der Grenzwerth eines Productes gleich dem Producte aus den Grenzwerthen der einzelnen Factoren ist, so lange die Factorenzahl endlich bleibt, dass aber diese Gleichheit nicht stattzufinden braucht, wenn die Factorenzahl unendlich wird.

Zur Bestimmung der Grenzwerthe von Producten sind folgende Hülfssätze von Nutzen. Nach Aufgabe 18 ist für ein beliebiges positives x und für ein echt gebrochenes positives y

$$l(1+x) < x, \quad y < l\left(\frac{1}{1-y}\right);$$

setzt man in der zweiten Ungleichung $y = \frac{x}{1+x}$, wo nun x jede positive Zahl bedeuten darf, so hat man zusammen

$$a) \qquad \frac{x}{1+x} < l(1+x) < x, \quad x > 0,$$

wofür auch die stärkere Ungleichung

$$b) \qquad x - x^2 < l(1+x) < x$$

genommen werden kann.

Lässt man in der Ungleichung

$$\frac{x}{1+x} < l(1+x)$$

$\frac{\beta}{\alpha}$ an die Stelle von x treten, so erhält man leicht

$$l\alpha < \frac{(\alpha+\beta)\,l(\alpha+\beta) - \alpha l \alpha}{\beta} - 1;$$

wenn man ferner in der Ungleichung

$$l(1+x) < x$$

die Substitution

$$x = \frac{\beta}{\alpha - \beta}$$

vornimmt, wobei $\alpha > \beta > 0$ sein muss, so gelangt man zu der Relation

$$\frac{\alpha l \alpha - (\alpha - \beta)\,l(\alpha - \beta)}{\beta} - 1 < l\alpha;$$

zusammengenommen ist demnach für $\alpha > \beta > 0$

$$c) \quad \frac{\alpha l \alpha - (\alpha-\beta)\,l(\alpha-\beta)}{\beta} - 1 < l\alpha < \frac{(\alpha+\beta)\,l(\alpha+\beta) - \alpha l\alpha}{\beta} - 1.$$

Aufgabe 24. Für ein positives γ und unendlich wachsende n soll der Grenzwerth des Productes

$$P_n = \left(1+\frac{\gamma}{n}\right)\left(1+\frac{\gamma}{n+1}\right)\left(1+\frac{\gamma}{n+2}\right)\cdots\left(1+\frac{\gamma}{2n-1}\right)$$

bestimmt werden.

Die einzelnen Factoren convergiren zwar gegen die Einheit, es ist aber $Lim\, P_n$ nicht $=1$. Mittelst der vorigen Ungleichung $c)$ findet man nämlich, wenn zur Abkürzung

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n-1}=v_n,$$

$$\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^2}=w_n$$

gesetzt wird,

$$\gamma v_n-\gamma^2 w_n < lP_n < \gamma v_n;$$

dabei ist w_n positiv und $< n\cdot\frac{1}{n^2}$ mithin $0 < w_n < \frac{1}{n}\cdot$ Durch Uebergang zur Grenze findet sich nun

$$Lim\, P_n = 2^\gamma.$$

Dasselbe Verfahren liefert den allgemeineren Satz, dass das Product

$$\left(1+\frac{\gamma}{n\alpha}\right)\left(1+\frac{\gamma}{n\alpha+\beta}\right)\left(1+\frac{\gamma}{n\alpha+2\beta}\right)\cdots\left(1+\frac{\gamma}{n\alpha+(n-1)\beta}\right)$$

gegen die Grenze

$$\left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\gamma}{\beta}}$$

convergirt, wenn α, β, γ positive Werthe haben.

Aufgabe 25. Für positive μ und unendlich wachsende n soll der Grenzwerth des Ausdrucks

$$P_n = \frac{\sqrt[n]{\mu(\mu+1)(\mu+2)\cdots(\mu+n-1)}}{\mu+\frac{1}{2}(n-1)}$$

ermittelt werden.

Benutzt man die Ungleichung $c)$ der Reihe nach für

$$\alpha = \mu+1,\quad \mu+2,\cdots \mu+n-1$$

und für $\beta=1$, so findet man, dass lP_n mehr beträgt als

$$l\left(\frac{\mu+n-1}{\mu+\frac{1}{2}(n-1)}\right)-1+(\mu-1)\frac{l(\mu+n-1)}{n}+\frac{1+(1-\mu)l\mu}{n}$$

dagegen weniger als

$$l\left(\frac{\mu+n}{\mu+\frac{1}{2}(n-1)}\right)-1+\mu\frac{l(\mu+n)}{n}+\frac{1+l\mu-(\mu+1)l(\mu+1)}{n}.$$

Nach einem bekannten Satze convergirt $\frac{l\omega}{\omega}$ bei unendlich wachsenden n gegen die Null*; hieraus folgt im vorliegenden Falle, dass sich lP_n der Grenze $l2-1$ nähert, also

$$Lim\ P_n = \frac{2}{e}.$$

Aufgabe 26. Es bezeichne Q_n das arithmetische, R_n das geometrische Mittel aus den Gliedern der Progression

$$a,\quad a+b,\quad a+2b,\quad a+3b,\cdots a+(n-1)b,$$

worin a und b als positiv vorausgesetzt werden; man sucht den Grenzwerth, gegen welchen $\frac{Q_n}{R_n}$ bei unendlich wachsenden n convergirt.

Setzt man $\frac{a}{b}=\mu$, so lässt sich die Aufgabe leicht auf die vorige zurückführen; der gesuchte Grenzwerth ist $\frac{1}{2}e$.

Aufgabe 27. Für unendlich wachsende n soll der Grenzwerth des Productes

$$P_n=\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\left(1+\frac{3}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n^2}\right)$$

bestimmt werden.

Mittelst der Ungleichung $x-x^2<l(1+x)<x$ findet man leicht

$$\tfrac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)-\tfrac{1}{6}\cdot\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)<lP_n<\tfrac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

und hieraus

$$Lim\ P_n=\sqrt{e}.$$

---

* Wegen $e^z>1+z$ ist um so mehr $e^z>z$ und durch Erhebung auf's Quadrat $e^{2z}>z^2$ mithin, wenn $e^{2z}=\omega$ gesetzt wird,

$$\omega>\tfrac{1}{4}(l\omega)^2 \text{ oder } \frac{l\omega}{\omega}<\frac{4}{l\omega}.$$

Da andererseits $\frac{l\omega}{\omega}$ positiv bleibt für $\omega>1$, so ergiebt sich jetzt der obige Satz.

Auf gleiche Weise folgt der allgemeinere Satz, dass das Product

$$\left(1+\frac{2a}{n^2}\right)\left(1+\frac{4a}{n^2}\right)\left(1+\frac{6a}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{2na}{n^2}\right)$$

gegen die Grenze e^a convergirt.

Grenzwerthe von Functionen zweier Variabelen.

Für die Bestimmung der Grenzwerthe der Functionen zweier Variabelen x und y ist die Bemerkung von Gewicht, dass eine Function $f(x, y)$ häufig ganz verschiedene Werthe annimmt, je nachdem erst $y = 0$ und dann $x = 0$, oder erst $x = 0$ und nachher $y = 0$, oder gleichzeitig $x = 0$ und $y = 0$ gesetzt wird. Als Beispiel möge die Function

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2 + ax + by}{x + y}$$

dienen; hier ist

$$f(x, 0) = x + a \quad \text{mithin} \quad f(0, 0) = a,$$
$$f(0, y) = y + b \quad \text{,,} \quad f(0, 0) = b,$$

ferner, wenn $y = \lambda x$ genommen und unter λ eine beliebige Constante verstanden wird,

$$f(x, \lambda x) = \frac{x + \lambda^2 x + a + b\lambda}{1 + \lambda} \quad \text{mithin} \quad f(0, 0) = \frac{a + b\lambda}{1 + \lambda},$$

endlich, wenn

$$y = -\frac{x(2x + a)}{b}$$

gesetzt wird,

$$f\left(x, -\frac{x(2x + a)}{b}\right) = -\frac{x(2x + a + b)}{b} \quad \text{mithin} \quad f(0, 0) = 0,$$

woraus erhellt, dass $f(0, 0)$ unendlich vieldeutig ist. Diese Erscheinung wird anschaulich klar, wenn man die Gleichung $z = f(x, y)$ als Gleichung einer Fläche betrachtet, die im vorliegenden Beispiele ein einfaches Hyperboloid ist. Erst $y = 0$ setzen und dann x zu Null werden lassen, heisst nämlich, auf der Verticalspur (xz-Spur) der Fläche bis zum Durchschnitte dieser Spur mit der z-Achse fortschreiten; erst $x = 0$ und nachher $y = 0$ nehmen, bedeutet dagegen, in der yz-Spur bis zum Durchschnitte mit der z-Achse fortgehen; durch $y = \lambda x$ und $x = 0$ wird ausgedrückt, dass man auf der Fläche diejenige Curve, deren Horizontalprojection eine durch den Coordinatenanfang gehende

Gerade ist, bis zur z-Achse verfolgt; endlich sagt die Gleichung $by = -x(2x + a)$, dass man auf der Fläche einer Curve nachgeht, deren Horizontalprojection eine gewisse durch den Coordinatenanfang gehende Parabel ist. Hiernach hat es nichts Verwunderliches, dass verschiedene Wege zu verschiedenen Punkten der z-Achse führen. Was von dem Falle $x = 0$, $y = 0$ gilt, findet natürlich auch dann statt, wenn man sich x und y als unendlich abnehmende Grössen denkt und dem entsprechend etwa mit δ und ε bezeichnet. Im Folgenden ist das Zeichen *Lim* immer zweimal angewendet und jedesmal durch einen Index diejenige Variabele hervorgehoben worden, auf welche sich der Grenzenübergang bezieht. Hiernach bedeutet

$$Lim_\delta\, Lim_\varepsilon\, f(\delta, \varepsilon),$$

dass zunächst der Grenzwerth für unendlich abnehmende ε bei constant bleibendem δ ermittelt und nacher der Grenzwerth für unendlich abnehmende δ bestimmt werden soll; dagegen ist unter

$$Lim_\varepsilon\, Lim_\delta\, f(\delta, \varepsilon)$$

der umgekehrte Gang der Operationen zu verstehen.

Aufgabe 28. Man sucht die Grenzwerthe von

$$\frac{(1 + \delta + \varepsilon)^\mu - 1}{a\delta + b\varepsilon}.$$

Bei constanten δ und gegen die Null convergirenden ε ergiebt sich

$$Lim_\varepsilon \frac{(1 + \delta + \varepsilon)^\mu - 1}{a\delta + b\varepsilon} = \frac{(1 + \delta)^\mu - 1}{a\delta},$$

daher

$$Lim_\delta\, Lim_\varepsilon \frac{(1 + \delta + \varepsilon)^\mu - 1}{a\delta + b\varepsilon} = \frac{\mu}{a}.$$

Umgekehrt ist

$$Lim_\varepsilon\, Lim_\delta \frac{(1 + \delta + \varepsilon)^\mu - 1}{a\delta + b\varepsilon} = \frac{\mu}{b}.$$

Setzt man $\delta = \alpha\vartheta$, $\varepsilon = \beta\vartheta$, wo α und β Constanten bezeichnen und ϑ eine gegen die Null convergirende Zahl ist, so nehmen δ und ε gleichzeitig, jedoch so ab, dass ihr Verhältniss constant bleibt; der Grenzwerth ist dann

$$\frac{(\alpha + \beta)\mu}{a\alpha + b\beta}.$$

Aufgabe 29. Man verlangt die Grenzwerthe von

$$\frac{a^\delta + b^\varepsilon - 2}{\delta + \varepsilon + \delta\varepsilon}.$$

Die gesuchten Werthe sind

$$Lim_\delta \, Lim_\varepsilon \frac{a^\delta + b^\varepsilon - 2}{\delta + \varepsilon + \delta\varepsilon} = la,$$

$$Lim_\varepsilon \, Lim_\delta \frac{a^\delta + b^\varepsilon - 2}{\delta + \varepsilon + \delta\varepsilon} = lb;$$

für $\delta = \alpha\vartheta$, $\varepsilon = \beta\vartheta$ und verschwindende ϑ ergiebt sich der Grenzwerth

$$\frac{\alpha la + \beta lb}{\alpha + \beta}.$$

Aufgabe 30. Man sucht die Grenzwerthe von

$$\frac{l(1 + \delta + \varepsilon)}{a\delta + b\varepsilon}.$$

Dieselben sind

$$Lim_\delta \, Lim_\varepsilon \frac{l(1 + \delta + \varepsilon)}{a\delta + b\varepsilon} = \frac{1}{a},$$

$$Lim_\varepsilon \, Lim_\delta \frac{l(1 + \delta + \varepsilon)}{a\delta + b\varepsilon} = \frac{1}{b};$$

für $\delta = \alpha\vartheta$, $\varepsilon = \beta\vartheta$ und verschwindende ϑ entsteht

$$\frac{\alpha + \beta}{a\alpha + b\beta}.$$

Aufgabe 31. Unter der Voraussetzung, dass τ und ω unendlich wachsende positive Zahlen bedeuten, sollen die Grenzwerthe von

$$\left(1 + \frac{1}{\tau + \omega}\right)^{a\tau + b\omega}$$

ermittelt werden.

Bei analoger Bezeichnung wie früher erhält man

$$Lim_\tau \, Lim_\omega \left[\left(1 + \frac{1}{\tau + \omega}\right)^{a\tau + b\omega}\right] = e^b,$$

$$Lim_\omega \, Lim_\tau \left[\left(1 + \frac{1}{\tau + \omega}\right)^{a\tau + b\omega}\right] = e^a;$$

setzt man $\tau = \alpha\sigma$, $\omega = \beta\sigma$ und lässt σ unendlich wachsen, so erhält man den Grenzwerth

$$e^{\left(\frac{a\alpha + b\beta}{\alpha + \beta}\right)}.$$

Aufgabe 32. Man verlangt die Grenzwerthe der Function

$$F(\delta, n) = \delta\left[\frac{1}{1^{1+\delta}} + \frac{1}{2^{1+\delta}} + \frac{1}{3^{1+\delta}} + \cdots + \frac{1}{n^{1+\delta}}\right]$$

für den Fall, dass δ unendlich abnimmt und die ganze positive Zahl n unendlich wächst.

Aus der für $a < b$ und $0 < \lambda < 1$ geltenden, auf Seite 4 unter γ bewiesenen Ungleichung

$$\lambda a^{\lambda-1} > \frac{b^\lambda - a^\lambda}{b - a} > \lambda b^{\lambda-1}$$

folgt für $a = m$, $b = m + 1$

$$\lambda m^{\lambda-1} > (m+1)^\lambda - m^\lambda > \lambda\,(m+1)^{\lambda-1}$$

oder

$$\frac{\lambda}{m\,(m+1)^\lambda} > \frac{1}{m^\lambda} - \frac{1}{(m+1)^\lambda} > \frac{\lambda}{(m+1)\,m^\lambda}.$$

Setzt man linker Hand statt $(m+1)^\lambda$ das kleinere m^λ, rechter Hand statt m^λ das grössere $(m+1)^\lambda$, so erhält man die stärkere Ungleichung

$$\frac{\lambda}{m^{1+\lambda}} > \frac{1}{m^\lambda} - \frac{1}{(m+1)^\lambda} > \frac{\lambda}{(m+1)^{1+\lambda}}.$$

Es sei nun $\lambda = \delta$ und m der Reihe nach $= 1, 2, 3, \ldots n-1$; die Addition der so entstehenden Ungleichungen giebt dann

$$\delta\left[\frac{1}{1^{1+\delta}} + \frac{1}{2^{1+\delta}} + \frac{1}{3^{1+\delta}} + \cdots + \frac{1}{(n-1)^{1+\delta}}\right]$$
$$> 1 - \frac{1}{n^\delta} >$$
$$\delta\left[\frac{1}{2^{1+\delta}} + \frac{1}{3^{1+\delta}} + \frac{1}{4^{1+\delta}} + \cdots + \frac{1}{n^{1+\delta}}\right],$$

woraus leicht die neue Ungleichung folgt

$$1 - \frac{1}{n^\delta} + \frac{\delta}{n^{1+\delta}} < F(\delta, n) < 1 - \frac{1}{n^\delta} + \delta.$$

Lässt man zunächst n ins Unendliche wachsen bei constanten $\delta > 0$, so erhält man

$$1 < Lim_n\, F(\delta, n) < 1 + \delta$$

und nachher, wenn δ gegen die Null convergirt,

$$Lim_\delta\, Lim_n\, F(\delta, n) = 1.$$

Wenn zweitens bei constanten n erst δ gegen die Null convergirt, so wird die vorletzte Ungleichung zur Gleichung

$$Lim_\delta\, F(\delta, n) = 0$$

und es ist daher auch

$$Lim_n\, Lim_\delta\, F(\delta, n) = 0.$$

Setzt man drittens

$$\delta = \frac{\varkappa}{ln},$$

wo $\varkappa$ eine beliebige Constante bezeichnet, so tritt die Abnahme von δ gleichzeitig mit dem Wachsen des n ein; die Ungleichung für $F(\delta, n)$ wird jetzt zur folgenden

$$1 - \left(1 - \frac{\varkappa}{nln}\right) e^{-\varkappa} < F\left(\frac{\varkappa}{ln}, n\right) < 1 - e^{-\varkappa} + \frac{\varkappa}{ln}$$

und diese giebt

$$Lim_n\, F\left(\frac{\varkappa}{ln}, n\right) = 1 - e^{-\varkappa}.$$

Bei der Aufsuchung der Grenzwerthe von Functionen mehrerer Variabelen hat man in analoger Weise die Reihenfolge der Grenzwerthe zu beachten, welche sich auf die einzelnen Variabelen beziehen.

Capitel I.

Einfache Differentiation von entwickelten Functionen einer Variabelen.

§ 1.

Grundformeln und allgemeine Regeln.

Für die Differentiation der sogenanten einfachen Functionen gelten die nachstehenden Formeln, welche gewissermassen das Einmaleins der Differentialrechnung ausmachen:

1) $$\frac{d(x^\mu)}{dx} = \mu x^{\mu - 1},$$

2) $$\frac{d(a^x)}{dx} = a^x la, \quad \frac{d(e^x)}{dx} = e^x,$$

3) $$\frac{d({}^a\log x)}{dx} = \frac{1}{x \cdot la}, \quad \frac{dlx}{dx} = \frac{1}{x},$$

4) $$\frac{d\sin x}{dx} = \cos x,$$

5) $$\frac{d\cos x}{dx} = -\sin x,$$

6) $$\frac{d\tan x}{dx} = \sec^2 x,$$

7) $$\frac{d\cot x}{dx} = -\csc^2 x,$$

8) $$\frac{d\sec x}{dx} = \sec^2 x \sin x,$$

9) $$\frac{d\csc x}{dx} = -\csc^2 x \cos x,$$

10) $$\frac{d\,\mathrm{arc}\sin x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = -\frac{d\,\mathrm{arc}\cos x}{dx},$$

11) $$\frac{d\,\mathrm{arc}\tan x}{dx} = \frac{1}{1 + x^2} = -\frac{d\,\mathrm{arc}\cot x}{dx},$$

12) $$\frac{d\,\mathrm{arc}\sec x}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}} = -\frac{d\,\mathrm{arc}\csc x}{dx}.$$

Sind α, β, γ, etc. constante Grössen, u, v, w, etc. Functionen einer und derselben Variabelen x, so hat man für die Differentiation des Aggregates $\alpha u + \beta v +$ etc. die Regel

$$13)\quad \frac{d(\alpha u + \beta v + \gamma w + \cdots)}{dx} = \alpha \frac{du}{dx} + \beta \frac{dv}{dx} + \gamma \frac{dw}{dx} + \cdots$$

Dieselbe gilt im Allgemeinen nur unter der Voraussetzung, dass die Anzahl der Summanden endlich ist; im entgegengesetzten Falle wird eine besondere Untersuchung erforderlich.

Zur Differentiation der Producte dient die Vorschrift

$$14)\quad \frac{d(uv)}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx},$$

wofür auch gesetzt werden kann

$$\frac{d(uv)}{dx} = uv \left(\frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{1}{v} \cdot \frac{dv}{dx}\right).$$

Aus der letzteren Form ergiebt sich bei einer grösseren Anzahl von Factoren

$$15)\quad \frac{d(uvw\ldots)}{dx} = uvw\ldots \left(\frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{1}{v} \cdot \frac{dv}{dx} + \frac{1}{w} \cdot \frac{dw}{dx} + \cdots\right).$$

Falls unendlich viel Factoren vorhanden sind, darf diese Formel nicht ohne Weiteres angewendet werden.

Die Differentiation der Quotienten unterliegt dem Gesetz

$$16)\quad \frac{d\left(\frac{v}{u}\right)}{dx} = \frac{u \frac{dv}{dx} - v \frac{du}{dx}}{u^2}.$$

Ist der Nenner constant $= a$, so bedarf es dieser Formel nicht, weil der Quotient $\frac{v}{a}$ als Product aus dem constanten Factor $\frac{1}{a}$ und dem variabelen Factor v angesehen werden kann. Bei constantem Zähler $u = b$ giebt die Formel einfacher

$$17)\quad \frac{d\left(\frac{b}{u}\right)}{dx} = -\frac{b}{u^2} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Handelt es sich um die Differentiation einer Function von einer Function

$$z = f[\varphi(x)],$$

so ersetzt man diese eine Gleichung durch die beiden folgenden Gleichungen

$$z = f[y], \quad y = \varphi(x).$$

Aus der ersten berechnet man $\frac{dz}{dy}$ ebenso als wenn y eine unabhängige Variabele wäre; aus der zweiten sucht man $\frac{dy}{dx}$, und schliesslich erhält man durch Multiplication

$$\text{18)} \qquad \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Für die praktische Rechnung empfiehlt es sich, nicht sogleich den Differentialquotienten $\frac{dz}{dx}$, sondern vorerst das Differential dz zu entwickeln und die angegebene Substitution von y im Gedächtnisse zu behalten. Das Ende der Rechnung kündigt sich von selbst dadurch an, dass das Differential der unabhängigen Variabelen als letzter Factor auftritt. Soll z. B. $l(a + bx + cx^2)$ differenzirt werden, so sagt man: analog der Formel

$$dly = \frac{1}{y} dy$$

ist auch, wenn statt y der Ausdruck $a + bx + cx^2$ gesetzt wird,

$$dl(a + bx + cx^2) = \frac{1}{a + bx + cx^2} d(a + bx + cx^2);$$

rechts hat man noch ein Aggregat zu differenziren und dies giebt wegen $da = 0$

$$\begin{aligned} dl(a + bx + cx^2) &= \frac{1}{a + bx + cx^2}[b dx + c d(x^2)] \\ &= \frac{1}{a + bx + cx^2}[b dx + c \cdot 2x dx] \\ &= \frac{b + 2cx}{a + bx + cx^2} dx \end{aligned}$$

und damit schliesst die Rechnung, weil es nur noch der beiderseitigen Division mit dx bedürfen würde, um den gesuchten Differentialquotienten zu erhalten. In diesem, wie in jedem andern Falle wandert das Zeichen d so lange von links nach rechts, bis es auf der äussersten Rechten nur noch vor x oder der sonstigen unabhängigen Variabelen steht.

§ 2.

Beispiele zur Differentiation algebraischer Functionen.

1) $d[(a+\alpha x)(b+\beta x)] = (a\beta + b\alpha + 2\alpha\beta x)\,dx.$

Die Aufgabe kann auf zwei verschiedene Arten behandelt werden; man benutzt entweder die Regel zur Differentiation der Producte, oder man führt die Multiplication von $a+\alpha x$ mit $b+\beta x$ aus und differenzirt das entstandene Aggregat. Dies giebt zugleich eine Controle der Rechnung.

2) $d[(a+\alpha x)(b+\beta x^2)] = (b\alpha + 2a\beta x + 3\alpha\beta x^2)\,dx.$

Hier gilt eine ähnliche Bemerkung wie vorhin.

3) $d[(\frac{1}{2}b^2 - bx + x^2)(\frac{1}{2}b^2 + bx + x^2)] = 4x^3\,dx.$

Warum ist das Differential so einfach und identisch mit $d(x^4)$?

4) $$d\left(\frac{c}{a+bx}\right) = -\frac{bc}{(a+bx)^2}\,dx.$$

5) $$d\left(\frac{\alpha+\beta x}{\alpha-\beta x}\right) = \frac{2\alpha\beta}{(\alpha-\beta x)^2}\,dx.$$

Man kann diese Aufgabe entweder direct nach Formel 16) behandeln, oder auf die vorhergehende zurückführen, indem man von der identischen Gleichung

$$\frac{\alpha+\beta x}{\alpha-\beta x} = \frac{2\alpha}{\alpha-\beta x} - 1$$

Gebrauch macht.

6) $$d\left(\frac{\alpha+\beta x}{a+bx}\right) = \frac{a\beta - b\alpha}{(a+bx)^2}\,dx.$$

Die vorhin angegebenen zwei Methoden sind auch hier anwendbar; welcher kleinen Modificationen bedarf die zweite?

7) $$d\left(\frac{a+bx}{a+bx+cx^2}\right) = -\frac{2acx + bcx^2}{(a+bx+cx^2)^2}\,dx.$$

8) $$d\left(\frac{\alpha+\beta x}{a+bx+cx^2}\right) = \frac{a\beta - b\alpha - 2c\alpha x - c\beta x^2}{(a+bx+cx^2)^2}\,dx.$$

9) $$d\left(\frac{\alpha+\beta x+\gamma x^2}{a+bx+cx^2}\right)$$
$$= \frac{a\beta - ba + 2(a\gamma - c\alpha)x + (b\gamma - c\beta)x^2}{(a+bx+cx^2)^2}\,dx.$$

Will man die Aufgabe nicht direct lösen, so kann man sie mittelst der identischen Gleichung

$$\frac{\alpha + \beta x + \gamma x^2}{a + bx + cx^2} = \frac{\gamma}{c} - \frac{1}{c} \cdot \frac{a\gamma - c\alpha + (b\gamma - c\beta)x}{a + bx + cx^2}$$

auf die vorhergehende zurückführen.

10) $$d\sqrt{a + bx} = \frac{b}{2\sqrt{a + bx}} dx.$$

11) $$d\sqrt{a + bx + cx^2} = \frac{b + 2cx}{2\sqrt{a + bx + cx^2}} dx.$$

12) $$d(x\sqrt{a + bx}) = \frac{2a + 3bx}{2\sqrt{a + bx}} dx.$$

Hier benutzt man entweder die Regel zur Differentiation der Producte nebst Formel 10) oder man setzt $x\sqrt{a + bx} = \sqrt{ax^2 + bx^3}$ und betrachtet den letzteren Ausdruck als Potenz eines Aggregates; was ist bequemer für die Rechnung?

13) $$d\left(\frac{\sqrt{a + bx}}{x}\right) = -\frac{2a + bx}{2x^2\sqrt{a + bx}} dx.$$

Hier gilt wieder die vorige Bemerkung.

14) $$d(x^\mu \sqrt{a + bx}) = \frac{2\mu a x^{\mu - 1} + (2\mu + 1) b x^\mu}{2\sqrt{a + bx}} dx.$$

15) $$d(x\sqrt{a + bx + cx^2}) = \frac{2a + 3bx + 4cx^2}{2\sqrt{a + bx + cx^2}} dx.$$

16) $$d\left(\frac{\sqrt{a + bx + cx^2}}{x}\right) = -\frac{2a + bx}{2x^2\sqrt{a + bx + cx^2}} dx.$$

17) $$d(x^\mu \sqrt{a + bx + cx^2})$$
$$= \frac{2\mu a x^{\mu - 1} + (2\mu + 1) b x^\mu + (2\mu + 2) c x^{\mu + 1}}{2\sqrt{a + bx + cx^2}} dx.$$

Für die letzten vier Beispiele kann man die bei Nr. 12 gemachte Bemerkung gleichfalls benutzen.

18) $$d\left(\frac{x}{\sqrt{a + bx}}\right) = \frac{2a + bx}{2\sqrt{(a + bx)^3}} dx.$$

Die zu differenzirende Function lässt sich entweder als Quotient oder als Product aus x und $(a + bx)^{-\frac{1}{2}}$ ansehen.

19) $$d\left(\frac{2a+bx}{\sqrt{a+bx}}\right)=\frac{b^2x}{2\sqrt{(a+bx)^3}}\,dx.$$

20) $$d\left(\frac{\alpha+\beta x}{\sqrt{a+bx}}\right)=\frac{2a\beta-b\alpha+b\beta x}{2\sqrt{(a+bx)^3}}\,dx.$$

21) $$d\left(\frac{b+2cx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}\right)=\frac{4ac-b^2}{2\sqrt{(a+bx+cx^2)^3}}\,dx.$$

22) $$d\left(\frac{2a+bx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}\right)=\frac{(b^2-4ac)x}{2\sqrt{(a+bx+cx^2)^3}}\,dx.$$

23) $$d\left(\frac{\alpha+\beta x}{\sqrt{a+bx+cx^2}}\right)=\frac{2\alpha\beta-b\alpha+(b\beta-2c\alpha)x}{2\sqrt{(a+bx+cx^2)^3}}\,dx.$$

24) $$d\left(\frac{x^\mu}{\sqrt{a+bx+cx^2}}\right)$$
$$=\frac{2\mu a x^{\mu-1}+(2\mu-1)bx^\mu+(2\mu-2)cx^{\mu+1}}{2\sqrt{(a+bx+cx^2)^3}}\,dx.$$

Hinsichtlich der letzten sechs Aufgaben gilt wieder die bei Nr. 18 gemachte Bemerkung.

25) $$d\left\{\frac{(a-2bx)\sqrt{a+bx}}{x\sqrt{x}}\right\}=-\frac{3a^2}{2x^2\sqrt{x(a+bx)}}\,dx.$$

Die hier gegebene Function lässt sich entweder als Quotient ansehen, oder als Product zweier Factoren:

$$\left(\frac{a}{x}-2b\right)\sqrt{\frac{a}{x}+b}$$

oder als Product von drei Factoren:

$$(a-2bx)x^{-\frac{3}{2}}(a+bx)^{\frac{1}{2}};$$

welche Form ist die bequemste für die Rechnung?

26) $$d\sqrt{\frac{\alpha+\beta x}{\alpha-\beta x}}=\frac{\alpha\beta}{(\alpha-\beta x)\sqrt{\alpha^2-\beta^2x^2}}\,dx.$$

Wie kann diese Aufgabe, falls man sie nicht direct lösen will, auf Nr. 23 zurückgeführt werden?

27) $$d\sqrt{\frac{\alpha+\beta x^2}{\alpha-\beta x^2}}=\frac{2\alpha\beta x}{(\alpha-\beta x^2)\sqrt{\alpha^2-\beta^2x^4}}\,dx.$$

28) $$d\left\{\frac{(\sqrt{a+bx}+\sqrt{a})^2}{x}\right\}=-\sqrt{a}\,\frac{(\sqrt{a+bx}+\sqrt{a})^2}{x^2\sqrt{a+bx}}\,dx.$$

Hier lässt sich die gegebene Function entweder als Quotient betrachten oder auf die Form

$$\frac{2a}{x} + b + 2\sqrt{a}\,\frac{\sqrt{a+bx}}{x}$$

bringen, welche die Anwendung von Nr. 13 gestattet.

29) $$d\left\{\frac{(\sqrt{a+cx^2}+\sqrt{a})^2}{x^2}\right\} = -2\sqrt{a}\,\frac{(\sqrt{a+cx^2}+\sqrt{a})^2}{x^3\sqrt{a+cx^2}}\,dx.$$

Hier gilt eine ähnliche Bemerkung wie vorhin, wobei Nr. 17 zu beachten ist.

30) $$d\left\{\frac{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}}{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}}\right\} = -\frac{\sqrt{a}}{b}\cdot\frac{(\sqrt{a+bx}+\sqrt{a})^2}{x^2\sqrt{a+bx}}\,dx.$$

Warum unterscheidet sich dieses Resultat von den in Nr. 28 verzeichneten nur durch einen constanten Factor?

31) $$d\left\{\frac{\sqrt{a+cx^2}+\sqrt{a}}{\sqrt{a+cx^2}-\sqrt{a}}\right\} = -\frac{2\sqrt{a}}{c}\cdot\frac{(\sqrt{a+cx^2}+\sqrt{a})^2}{x^3\sqrt{a+cx^2}}\,dx.$$

32) $$d\left\{\frac{\sqrt{\alpha+\beta x}+\sqrt{\alpha-\beta x}}{\sqrt{\alpha+\beta x}-\sqrt{\alpha-\beta x}}\right\} = -\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta^2x^2}}{x^2\sqrt{\alpha^2-\beta^2x^2}}\,dx.$$

In wie fern lässt sich die vorige Bemerkung zu einer wesentlichen Abkürzung der Rechnung benutzen?

33) $$d\left\{(-3a+2bx)\sqrt[3]{(a+bx)^2}\right\} = \frac{10}{3}\cdot\frac{b^2x}{\sqrt[3]{a+bx}}\,dx.$$

34) $$d\left\{(-3a+2bx^2)\sqrt[3]{(a+bx^2)^2}\right\} = \frac{20}{3}\cdot\frac{b^2x^3}{\sqrt[3]{a+bx^2}}\,dx.$$

35) $$d\left\{(-3a^2+abx^2+4b^2x^4)\sqrt[3]{a+bx^2}\right\} = \tfrac{56}{3}\,b^2x^3\sqrt[3]{a+bx^2}\cdot dx.$$

36) $$d\left\{(-4a+3bx)\sqrt[4]{(a+bx)^3}\right\} = \frac{21}{4}\cdot\frac{b^2x}{\sqrt[4]{a+bx}}\,dx.$$

37) $$d\left\{(-4a+3bx^2)\sqrt[4]{(a+bx^2)^3}\right\} = \frac{21}{2}\cdot\frac{b^2x^3}{\sqrt[4]{a+bx^2}}\,dx.$$

38) $$d\left\{(-4a^2+abx^2+5b^2x^4)\sqrt[4]{a+bx^2}\right\} = \frac{45}{2}\,b^2x^3\sqrt[4]{a+bx^2}\cdot dx.$$

39) $$d\sqrt{\left\{\frac{x^3}{(a+\alpha x)(b+\beta x)(c+\gamma x)}\right\}}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{a}{a+\alpha x}+\frac{b}{b+\beta x}+\frac{c}{c+\gamma x}\right\}\frac{\sqrt{x}\,.\,dx}{\sqrt{(a+\alpha x)(b+\beta x)(c+\gamma x)}}.$$

Zur Lösung dieser Aufgabe kann man unter Anderem die Formel 15) in § 1 benutzen.

40) $$\left\{\frac{(k+\varkappa x)^{m+n+\cdots}}{(a+\alpha x)^m (b+\beta x)^n \cdots}\right\}$$

$$=\left\{m\frac{a\varkappa-k\alpha}{a+\alpha x}+n\frac{b\varkappa-k\beta}{b+\beta x}+\cdots\right\}\frac{(k+\varkappa x)^{m+n+\cdots-1}\,dx}{(a+\alpha x)^m (b+\beta x)^n \cdots};$$

die Anzahl der Factoren ist hier beliebig nur endlich.

§ 3.

Beispiele zur Differentiation von Exponentialgrössen und Logarithmen.

1) $$d[(x-1)e^x]=xe^x\,dx.$$

2) $$d[(x^2-2x+2)e^x]=x^2e^x\,dx.$$

3) $$d[(x^3-3x^2+6x-6)e^x]=x^3e^x\,dx.$$

Hieran knüpft sich die allgemeinere Frage: „Wie müssen die Coefficienten A_1, A_2, A_3 etc. gewählt werden, wenn die Gleichung

4) $$d[(x^m-A_1x^{m-1}+A_2x^{m-2}-\cdots)e^x]=x^me^x\,dx$$

stattfinden soll, worin m eine ganze positive Zahl bedeutet?"

5) $$d\left(\frac{1}{x}e^x\right)=\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)e^x\,dx.$$

6) $$d\left[\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\right)e^x\right]=\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{x^3}\right)e^x\,dx.$$

7) $$d\left[\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{2x}\right)e^x\right]=\left(\frac{1}{2x}-\frac{3}{x^4}\right)e^x\,dx.$$

8) $$d\left[\left(\frac{1}{x^4}+\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{6x^3}+\frac{1}{6x}\right)e^x\right]=\left(\frac{1}{6x}-\frac{4}{x^5}\right)e^x\,dx.$$

Wie müssen überhaupt die Coefficienten B_1, B_2, B_3 etc. nebst a und b gewählt werden, wenn die Gleichung

9) $$d\left[\left(\frac{1}{x^m}+\frac{B_1}{x^{m-1}}+\frac{B_2}{x^{m-1}}+\cdots\right)e^x\right]=\left(\frac{a}{x}-\frac{b}{x^{m+1}}\right)e^x\,dx$$

stattfinden soll?

10) $$d\left(e^{2ax+bx^2}\right)=2\,(a+bx)\,e^{2ax+bx^2}dx.$$

11) $$d\left(xe^{2ax+bx^2}\right)=[1+2\,(ax+bx^2)]\,e^{2ax+bx^2}\,dx.$$

12) $$d\left(e^{\sqrt{a+bx+cx^2}}\right)=\frac{b+2\,cx}{2\sqrt{a+bx+cx^2}}\,e^{\sqrt{a+bx+cx^2}}\,dx.$$

13) $$dl\,(a+bx)=\frac{b}{a+bx}\,dx.$$

14) $$dl\,(a+bx+cx^2)=\frac{b+2\,cx}{a+bx+cx^2}\,dx.$$

15) $$dl\,[(a+\alpha x)\,(b+\beta x)]=\frac{a\beta+b\alpha+2\,\alpha\beta x}{(a+\alpha x)\,(b+\beta x)}\,dx.$$

Den gegebenen Logarithmus kann man entweder im Ganzen differenziren oder vor der Differentiation in die Logarithmen der einzelnen Factoren zerlegen.

16) $$dl\left(\frac{\alpha+\beta x}{\alpha-\beta x}\right)=\frac{2\,\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2x^2}\,dx.$$

Hier gilt eine ähnliche Bemerkung wie vorhin.

17) $$dl\left(\frac{\alpha+\beta x}{a+bx}\right)=\frac{a\beta-b\alpha}{(a+bx)\,(\alpha+\beta x)}\,dx.$$

18) $$dl\left(\frac{x}{\sqrt{a+bx}}\right)=\frac{2a+bx}{2x\,(a+bx)}\,dx.$$

19) $$dl\left(\frac{x}{\sqrt{a+cx^2}}\right)=\frac{a}{x(a+cx^2)}\,dx.$$

20) $$dl\left(\frac{b+2cx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}\right)=\frac{4\,ac-b^2}{2\,(b+2cx)\,(a+bx+cx^2)}\,dx.$$

21) $$dl\left(\frac{2a+bx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}\right)=\frac{(b^2-4\,ac)\,x}{2\,(2a+bx)\,(a+bx+cx^2)}\,dx.$$

22) $$dl\,(\sqrt{c}\cdot x+\sqrt{a+cx^2})=\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a+cx^2}}\,dx.$$

23) $$dl\left(\frac{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}}\right)=\frac{\sqrt{a}}{x\sqrt{a+bx}}\,dx.$$

24) $$dl\left(\frac{\sqrt{a+cx^2}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+cx^2}+\sqrt{a}}\right)=\frac{2\sqrt{a}}{x\sqrt{a+cx^2}}\,dx.$$

25) $$dl\left(\frac{\sqrt{\alpha+\beta x}-\sqrt{\alpha-\beta x}}{\sqrt{\alpha+\beta x}+\sqrt{\alpha-\beta x}}\right)=\frac{\alpha}{x\sqrt{\alpha^2-\beta^2x^2}}\,dx.$$

Setzt man in Nr. 24) $a=\alpha^2$, $c=-\beta^2$, so unterscheiden sich die rechten Seiten der Gleichungen 24) und 25) nur um einen constanten Factor; was folgt daraus in Beziehung auf die links stehenden Logarithmen?

26) $$dl\left(\frac{2\sqrt{c(a+bx+cx^2)}+(b+2cx)}{2\sqrt{c(a+bx+cx^2)}-(b+2cx)}\right)$$
$$=\frac{2\sqrt{c}}{\sqrt{a+bx+cx^2}}\,dx.$$

27) $$dl(ae^x+b)=\frac{ae^x}{ae^x+b}\,dx.$$

28) $$dl\left(\frac{\alpha e^x-\beta}{\alpha e^x+\beta}\right)=\frac{2\alpha\beta}{\alpha^2e^x-\beta^2e^{-x}}\,dx.$$

29) $$dl\left(\sqrt{ae^{2x}+b}+\sqrt{a}\cdot e^x\right)=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+be^{-2x}}}\,dx.$$

30) $$dl\left(\frac{\sqrt{a+be^x}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+be^x}+\sqrt{a}}\right)=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+be^x}}\,dx.$$

§ 4.

Beispiele zur Differentiation trigonometrischer Functionen.

1) $d[\sin^m(\alpha x+\beta)]=m\alpha\sin^{m-1}(\alpha x+\beta)\cos(\alpha x+\beta)\,dx.$

2) $d[\cos^m(\alpha x+\beta)]=-m\alpha\cos^{m-1}(\alpha x+\beta)\sin(\alpha x+\beta)\,dx.$

3) $d[\tan^m(\alpha x+\beta)]=m\alpha\tan^{m-1}(\alpha x+\beta)\sec^2(\alpha x+\beta)\,dx.$

4) $d(2x+\sin 2x)=4\cos^2x\,dx.$

5) $d(2x-\sin 2x)=4\sin^2x\,dx.$

6) $d(9\sin x+\sin 3x)=12\cos^3x\,dx.$

7) $d(9\cos x-\cos 3x)=-12\sin^3x\,dx.$

8) $d(x+\sin x\cos x)=2\cos^2x\,dx.$

9) $$d(x - \sin x \cos x) = 2 \sin^2 x \, dx.$$

10) $$d\{(2 + \cos^2 x) \sin x\} = 3 \cos^3 x \, dx.$$

11) $$d\{(2 + \sin^2 x) \cos x\} = - 3 \sin^3 x \, dx.$$

Warum stimmen die rechten Seiten von 4) und 8), 5) und 9), 6) und 10), 7) und 11) bis auf constante Factoren mit einander überein?

12) $$d\{\tfrac{3}{2} x + (\tfrac{3}{2} \cos x + \cos^3 x) \sin x\} = 4 \cos^4 x \, dx.$$

13) $$d\{\tfrac{3}{2} x - (\tfrac{3}{2} \sin x + \sin^3 x) \cos x\} = 4 \sin^4 x \, dx.$$

14) $$d(3 \tan x + \tan^3 x) = \frac{3}{\cos^4 x} dx.$$

15) $$d(3 \cot x + \cot^3 x) = - \frac{3}{\sin^4 x} dx.$$

16) $$d(\tan x - \tfrac{1}{3} \tan^3 x) = \frac{\cos 2x}{\cos^4 x} dx.$$

17) $$d(\tan x - \tan^3 x) = \frac{\cos 3x}{\cos^5 x} dx.$$

18) $$d(\tfrac{3}{2} \tan^2 x - \tfrac{1}{4} \tan^4 x) = \frac{\sin 3x}{\cos^5 x} dx.$$

19) $$d(2 \tan^2 x - \tan^4 x) = \frac{\sin 4x}{\cos^6 x} dx.$$

20) $$d\left\{\frac{3 \tan x - \tan^3 x}{1 - 3 \tan^2 x}\right\} = \frac{3}{\cos^2 3x} dx.$$

21) $$d\left\{\frac{\tan x - \tan^3 x}{1 - 6 \tan^2 x + \tan^4 x}\right\} = \frac{1}{\cos^2 4x} dx.$$

22) $$d\left(\frac{\sin x}{a + b \cos x}\right) = \frac{a \cos x + b}{(a + b \cos x)^2} dx.$$

23) $$d\left(\frac{1}{\alpha \cos^2 x + \beta \sin^2 x}\right) = \frac{(\alpha - \beta) \sin 2x}{(\alpha \cos^2 x + \beta \sin^2 x)^2} dx.$$

24) $$d\sqrt{\alpha \cos^2 x + \beta \sin^2 x} = - \frac{(\alpha - \beta) \sin 2x}{2\sqrt{\alpha \cos^2 x + \beta \sin^2 x}} dx.$$

25) $$d\left\{\frac{\sqrt{\alpha \cos^2 x + \beta \sin^2 x}}{\cos x}\right\} = \frac{\beta \sin x \sec^2 x}{\sqrt{\alpha \cos^2 x + \beta \sin^2 x}} dx.$$

26) $$d\left\{\frac{\sqrt{\alpha \cos^2 x + \beta \sin^2 x}}{\sin x}\right\} = - \frac{\alpha \cos x \csc^2 x}{\sqrt{\alpha \cos^2 x + \beta \sin^2 x}} dx.$$

27) $d\left\{\frac{\sqrt{\alpha \cos^2 x + \beta \sin^2 x}}{\cos x \sin x}\right\} = -\frac{\alpha \cot^2 x - \beta \tan^2 x}{\sqrt{\alpha \cos^2 x + \beta \sin^2 x}} dx.$

28) $d\left\{\frac{\cos x}{\sqrt{\alpha \cos^2 x + \beta \sin^2 x}}\right\} = -\frac{\beta \sin x}{\sqrt{(\alpha \cos^2 x + \beta \sin^2 x)^3}} dx.$

29) $d\left\{\frac{\sin x}{\sqrt{\alpha \cos^2 x + \beta \sin^2 x}}\right\} = \frac{\alpha \cos x}{\sqrt{(\alpha \cos^2 x + \beta \sin^2 x)^3}} dx.$

30) $d\left\{\frac{\cos x \sin x}{\sqrt{\alpha \cos^2 x + \beta \sin^2 x}}\right\} = \frac{\alpha \cos^4 x - \beta \sin^4 x}{\sqrt{(\alpha \cos^2 x + \beta \sin^2 x)^3}} dx.$

§ 5.

Beispiele zur Differentiation cyclometrischer Functionen.

1) $$d \arctan \frac{1}{x} = -\frac{1}{1+x^2} dx.$$

2) $$d \arctan \frac{1-x}{1+x} = -\frac{1}{1+x^2} dx.$$

Warum sind die rechten Seiten dieser Gleichungen identisch mit $d(-\arctan x)$?

3) $$d \arctan \frac{2x}{1-x^2} = \frac{2}{1+x^2} dx.$$

4) $$d \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} = \frac{2}{1+x^2} dx.$$

Warum stimmen die rechten Seiten dieser Gleichungen überein mit $d(2 \arctan x)$?

5) $$d \arctan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Warum ist die rechte Seite $= d \arcsin x$?

6) $$d \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{1+x^2} dx.$$

Warum ist die rechte Seite $= d \arctan x$?

7) $$d \arcsin (2x\sqrt{1-x^2}) = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Warum ist die rechte Seite $= d(2 \arcsin x)$?

8) $$d \arctan \left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right) = \frac{1}{2(1+x^2)} dx.$$

Warum ist die rechte Seite $-d(\frac{1}{2} \operatorname{arc} \tan x)$?

9) $$d\left\{2 \operatorname{arc} \tan \frac{b+2cx}{\sqrt{4ac-b^2}}\right\} = \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{a+bx+cx^2}\,dx.$$

10) $$d \operatorname{arc} \sin \frac{2cx-b}{\sqrt{4ac+b^2}} = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a+bx-cx^2}}\,dx.$$

11) $$d\left\{2 \operatorname{arc} \tan \frac{2a+bx}{x\sqrt{4ac-b^2}}\right\} = -\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{a+bx+cx^2}\,dx.$$

12) $$d \operatorname{arc} \sin \frac{2a-bx}{x\sqrt{4ac+b^2}} = -\frac{\sqrt{a}}{x\sqrt{-a+bx+cx^2}}\,dx.$$

13) $$d \operatorname{arc} \tan \frac{\sqrt{2\alpha+\beta}\cdot x}{\alpha-x^2} = \frac{\sqrt{2\alpha+\beta}\,(\alpha+x^2)}{\alpha^2+\beta x^2+x^4}\,dx.$$

14) $$d \operatorname{arc} \sin \frac{\alpha x+\beta}{\alpha+\beta x} = \frac{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}{(\alpha+\beta x)\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

15) $$d \operatorname{arc} \sin \frac{(2\alpha+\beta\gamma)x-\alpha\gamma}{\gamma(\alpha+\beta x)} = \frac{\sqrt{\alpha(\alpha+\beta\gamma)}}{(\alpha+\beta x)\sqrt{\gamma x-x^2}}\,dx.$$

16) $$d \operatorname{arc} \sin \frac{2a\beta-b\alpha+(b\beta-2c\alpha)x}{\sqrt{b^2-4ac}\cdot(\alpha+\beta x)}$$
$$= \frac{\sqrt{b\alpha\beta-a\beta^2-c\alpha^2}}{(\alpha+\beta x)\sqrt{a+bx+cx^2}}\,dx.$$

17) $$d \operatorname{arc} \sin \frac{\sqrt{(\alpha^2-\beta^2)(1-x^2)}}{\alpha+\beta x} = -\frac{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}{(\alpha+\beta x)\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

18) $$d \operatorname{arc} \tan \frac{\sqrt{(\alpha^2-\beta^2)(1-x^2)}}{\alpha x+\beta} = -\frac{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}{(\alpha+\beta x)\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Warum sind die rechten Seiten von 17) und 18) gleich und entgegengesetzt der rechten Seite von Nr. 14)?

19) $$d\left\{2 \operatorname{arc} \sin \sqrt{\frac{(\alpha+\beta\gamma)x}{\gamma(\alpha+\beta x)}}\right\} = \frac{\sqrt{\alpha(\alpha+\beta\gamma)}}{(\alpha+\beta x)\sqrt{\gamma x-x^2}}\,dx.$$

20) $$d\left\{2 \operatorname{arc} \tan \sqrt{\frac{(\alpha+\beta\gamma)x}{\alpha(\gamma-x)}}\right\} = \frac{\sqrt{\alpha(\alpha+\beta\gamma)}}{(\alpha+\beta x)\sqrt{\gamma x-x^2}}\,dx.$$

Weshalb stimmen die rechten Seiten von Nr. 15), 19) und 20) überein?

21) $$d \operatorname{arc\,tan} \frac{\sqrt{\alpha+\beta}\,.\,x}{\sqrt{\alpha(1-x^2)}} = \frac{\sqrt{\alpha(\alpha+\beta)}}{(\alpha+\beta x^2)\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

22) $$d \operatorname{arc\,sin} \frac{\sqrt{\alpha+\beta}\cdot x}{\sqrt{\alpha+\beta x^2}} = \frac{\sqrt{\alpha(\alpha+\beta)}}{(\alpha+\beta x^2)\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

23) $$d \operatorname{arc\,sin} \frac{\sqrt{\gamma}\,(2\alpha+\beta x)}{\beta\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}$$
$$= \frac{\sqrt{\gamma(\beta^2-4\alpha\gamma)}\cdot x}{2(\alpha+\beta x+\gamma x^2)\sqrt{\alpha+\beta x}}\,dx.$$

24) $$d \operatorname{arc\,sin} \frac{\sqrt{\alpha}\,(\beta+2\gamma x)}{\beta\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}$$
$$= -\frac{\sqrt{\alpha(\beta^2-4\alpha\gamma)}}{2(\alpha+\beta x+\gamma x^2)\sqrt{\beta x+\gamma x^2}}\,dx.$$

§ 6.

Vermischte Beispiele.

1) $$d(x^x) = x^x(1+lx)\,dx.$$

Man beachte hierbei, dass x^x als Exponentialgrösse dargestellt werden kann.

2) $$d(x^{lx}) = 2\,x^{lx-1}\,lx\,dx.$$

3) $$d[(lx)^x] = (lx)^{x-1}\{1+lx\cdot l(lx)\}\,dx.$$

4) $$d\left\{\left(\frac{x}{e}\right)^x\right\} = \left(\frac{x}{e}\right)^x lx\,dx.$$

Wenn u und v Functionen von x bedeuten, u' und v' ihre nach x genommenen Differentialquotienten sind, so gilt überhaupt die Formel

5) $$d(u^v) = u^{v-1}(u'v+uv'\,lu)\,dx.$$

Im Folgenden bezeichnen ${}^b\!\log z$ den zur Basis b gehörenden Logarithmus von z; es ist dann

6) $$d({}^x\!\log a) = -\frac{1}{x}\cdot{}^x\!\log a\cdot{}^x\!\log e\cdot dx.$$

Hier wird es zweckmässig sein, ${}^{x}log\, a$ durch natürliche Logarithmen auszudrücken.

$$7)\quad d\{{}^{x}log\,(\alpha+\beta x)\} = \left\{\frac{\beta}{\alpha+\beta x} - \frac{1}{x}\cdot {}^{x}log\,(\alpha+\beta x)\right\}{}^{x}log\, e\cdot dx.$$

$$8)\quad d\{{}^{x}log\, sin\, x\} = \left\{cot x - \frac{1}{x}\cdot {}^{x}log\, sin x\right\}{}^{x}log\, e\cdot dx.$$

Sind überhaupt y und z Functionen von x, y' und z' ihre Differentialquotienten, so gilt die allgemeine Formel

$$9)\quad d\,({}^{y}log\, z) = \left(\frac{z'}{z} - \frac{y'}{y}\cdot {}^{y}log\, z\right)\cdot {}^{y}log\, e\, dx.$$

$$10)\quad d\{x\, arc\, sin x + \sqrt{1-x^2}\} = arc\, sin x\, dx.$$

$$11)\quad d\{x\, arc\, tan x - \tfrac{1}{2}l\,(1+x^2)\} = arc\, tan x\, dx.$$

$$12)\quad d\left\{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, arc\, sin x + \tfrac{1}{2}\, l\,(1-x^2)\right\} = \frac{arc\, sin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}\, dx.$$

$$13)\quad d\{x^2 + (arc\, sin x - 2x\sqrt{1-x^2})\, arc\, sin x\} = \frac{4x^2\, arc\, sin x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx.$$

$$14)\quad d\{(x - \tfrac{1}{2}\, arc\, tan x)\, arc\, tan x - \tfrac{1}{2}\, l\,(1+x^2)\} = \frac{x^2\, arc\, tan x}{1+x^2}\, dx.$$

$$15)\quad d\left\{\frac{1}{1+x^2} + \left(\frac{2x}{1+x^2} + arc\, tan x\right) arc\, tan x\right\} = \frac{4\, arc\, tan x}{(1+x^2)^2}\, dx.$$

$$16)\quad d\left\{l\left(\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\right) - \frac{arc\, sin x}{x}\right\} = \frac{arc\, sin x}{x^2}\, dx.$$

$$17)\quad d\{e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)\} = (a^2+b^2)\, e^{ax}\cos bx\, dx.$$

$$18)\quad d\{e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)\} = (a^2+b^2)\, e^{ax}\sin bx\, dx.$$

$$19)\quad d\{(x + k\sqrt{1-x^2})\, e^{k\, arc\, sin x}\} = (1+k^2)\, e^{k\, arc\, sin x}\, dx.$$

$$20)\quad d\left\{\frac{k+x}{\sqrt{1+x^2}}\, e^{k\, arc\, tan x}\right\} = \frac{1+k^2}{\sqrt{(1+x^2)^3}}\, e^{k\, arc\, tan x}\, dx.$$

$$21)\quad d\{x\cos(lx - \tfrac{1}{4}\pi)\} = \sqrt{2}\cos(lx)\, dx.$$

$$22)\quad d\{x\sin(lx - \tfrac{1}{4}\pi)\} = \sqrt{2}\sin(lx)\, dx.$$

$$23)\quad dl\left(\frac{\alpha + \beta\, tan x}{\alpha - \beta\, tan x}\right) = \frac{2\alpha\beta}{\alpha^2\cos^2 x - \beta^2\sin^2 x}\, dx.$$

$$24)\quad dl\left(\frac{\sqrt{b+a} + \sqrt{b-a}\, tan\tfrac{1}{2}x}{\sqrt{b+a} - \sqrt{b-a}\, tan\tfrac{1}{2}x}\right) = \frac{\sqrt{b^2-a^2}}{a + b\cos x}\, dx.$$

25) $$d\,arc\,tan\left(\frac{\beta}{\alpha}\tan x\right) = \frac{\alpha\beta}{\alpha^2\cos^2 x + \beta^2\sin^2 x}\,dx.$$

26) $$d\,arc\,tan\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\tfrac{1}{2}x\right) = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{2(a+b\cos x)}\,dx.$$

27) $$d\,l\left\{\frac{(a-b)\tan\frac{1}{2}x + c - \sqrt{b^2+c^2-a^2}}{(a-b)\tan\frac{1}{2}x + c + \sqrt{b^2+c^2-a^2}}\right\}$$
$$= \frac{\sqrt{b^2+c^2-a^2}}{a+b\cos x + c\sin x}\,dx.$$

28) $$d\,arc\,tan\frac{(a-b)\tan\frac{1}{2}x + c}{\sqrt{a^2-b^2-c^2}} = \frac{\sqrt{a^2-b^2-c^2}}{2(a+b\cos x+c\sin x)}\,dx.$$

29) $$d\left\{\sqrt{2}\,arc\,tan\frac{\sqrt{2a}\cdot\sin\frac{1}{2}x}{\sqrt{(a+b)\cos x}}\right\} = \frac{\sqrt{a(a+b)}\cdot\cos\frac{1}{2}x}{(a+b\cos x)\sqrt{\cos x}}\,dx.$$

30) $$d\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\,l\left(\frac{\sqrt{2a}\cdot\cos\frac{1}{2}x - \sqrt{(a-b)\cos x}}{\sqrt{2a}\cdot\cos\frac{1}{2}x + \sqrt{(a-b)\cos x}}\right)\right\}$$
$$= \frac{\sqrt{a(a-b)}\cdot\sin\frac{1}{2}x}{(a+b\cos x)\sqrt{\cos x}}\,dx.$$

Capitel II.

Mehrfache Differentiationen von entwickelten Functionen einer Variabelen.

§ 7.

Grundformeln und allgemeine Regeln.

Die successiven Differentialquotienten der Function $f(x)$ werden entweder bezeichnet durch

$$\frac{d f(x)}{dx}, \quad \frac{d^2 f(x)}{dx^2}, \quad \frac{d^3 f(x)}{dx^3}, \quad \dots$$

oder kürzer durch

$$D f(x), \quad D^2 f(x), \quad D^3 f(x), \quad \dots$$

oder auch durch

$$f'(x), \quad f''(x), \quad f'''(x), \quad \dots$$

Für die höheren Differentialquotienten der einfachsten Functionen gelten folgende Formeln:

1) $$D^n[(a+bx)^\mu]$$
$$= \mu(\mu-1)(\mu-2)\dots(\mu-[n-1])\, b^n (a+bx)^{\mu-n};$$

specieller für $\mu = -1$

2) $$D^n\left(\frac{1}{a+bx}\right) = \frac{(-1)^n 1\cdot 2\cdot 3\cdots n\cdot b^n}{(a+bx)^{n+1}},$$

und für $\mu = -\frac{1}{2}$

3) $$D^n\left(\frac{1}{\sqrt{a+bx}}\right) = \frac{(-1)^n 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1) b^n}{2^n (a+bx)^n \sqrt{a+bx}}.$$

4) $$D^n l(a+bx) = \frac{(-1)^{n-1} 1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1) b^n}{(a+bx)^n}.$$

5) $$D^n(e^{bx}) = b^n e^{bx}.$$

6) $$D^n \sin x = \sin(\tfrac{1}{2} n\pi + x).$$

7) $$D^n \cos x = \cos(\tfrac{1}{2} n\pi + x).$$

Bedeuten u und v Functionen der Variabelen x, so ist

8) $$D^n(au + bv) = a\,D^n u + b\,D^n v.$$

9) $$D^n(uv) = (n)_0\, u \cdot D^n v + (n)_1\, Du \cdot D^{n-1} v + (n)_2\, D^2 u \cdot D^{n-2} v + \cdots,$$

wobei in der letzten Formel unter $(n)_0$, $(n)_1$, $(n)_2$, etc. die Binomialcoefficienten

$$1,\ \frac{n}{1},\ \frac{n(n-1)}{1\cdot 2},\ \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3},\ \ldots$$

zu verstehen sind.

Um die höheren Differentialquotienten einer gegebenen Function $f(x)$ zu entwickeln, kann man zwei verschiedene Methoden benutzen: die recurrirende und die independente Darstellung. Bei der ersten bildet man zunächst eine Gleichung zwischen zwei oder mehreren auf einander folgenden Differentialquotienten beliebig hoher Ordnung, wie z. B. zwischen $f^{(n)}(x)$, $f^{(n+1)}(x)$, $f^{(n+2)}(x)$, und berechnet mittelst dieser Gleichung (der sogenannten Recursionsformel) einen Differentialquotienten nach dem andern. Bei der zweiten Methode sucht man $f^{(n)}(x)$ unabhängig von den vorhergehenden Differentialquotienten darzustellen, wie dies z. B. bei den Formeln 1) bis 7) geschehen ist. Da sich für keine der beiden Methoden Vorschriften geben lassen, so dienen die folgenden Beispiele hauptsächlich um zu zeigen, wie man in speciellen Fällen die besonderen Eigenschaften einer gegebenen Function benutzen muss.

§ 8.

Beispiele zur recurrirenden Entwickelung höherer Differentialquotienten.

1. Handelt es sich um die successiven Differentialquotienten von

$$f(x) = \sqrt{1+x^2},$$

so differenzirt man zunächst einmal; die entstehende Gleichung

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

multiplicirt man mit $1 + x^2$, giebt dem Producte die Form

$$(1 + x^2) f'(x) = x f(x)$$

und differenzirt noch $(m + 1)$ mal mittelst der Formel 9) in § 7; das Resultat lautet:

$$(1 + x^2) f^{(m+2)}(x) + (m + 1)_1 \cdot 2x f^{(m+1)}(x) + (m + 1)_2 \cdot 2 f^{(m)}(x)$$
$$= x f^{(m+1)}(x) + (m + 1)_1 f^{(m)}(x)$$

oder

$$f^{(m+2)}(x) = -\frac{(2m + 1) x f^{(m+1)}(x) + (m - 1)(m + 1) f^{(m)}(x)}{1 + x^2}.$$

Für $m = 0$ folgt aus dieser Recursionsformel unter Einführung der schon bekannten Werthe von $f^{(0)}(x) = f(x)$ und $f'(x)$

$$f''(x) = \frac{1}{\sqrt{(1 + x^2)^3}};$$

ferner ist für $m = 1$, 2 u. s. w.

$$f'''(x) = -\frac{3x f''(x)}{1 + x^2} = -\frac{3x}{\sqrt{(1 + x^2)^5}},$$

$$f^{IV}(x) = -\frac{5x f'''(x) + 3 f''(x)}{1 + x^2} = \frac{12x^2 - 3}{\sqrt{(1 + x^2)^7}}$$

u. s. w.

In dem speciellen Falle $x = 0$ wird die Recursionsformel einfacher, nämlich

$$f^{(m+2)}(0) = -(m - 1)(m + 1) f^{(m)}(0)$$

und daraus erhält man wegen $f(0) = 1$ und $f'(0) = 0$

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{\frac{1}{2}n - 1} [1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (n - 3)]^2 (n - 1), \text{ für gerade } n$$
$$f^{(n)}(0) = 0, \qquad \text{für ungerade } n.$$

2. Die Function

$$f(x) = (a + bx^2)^\mu$$

giebt bei gleicher Behandlung

$$(a + bx^2) f'(x) = 2\mu b x f(x),$$

$$f^{(m+2)}(x) = b \frac{(2\mu - 2m - 2) x f^{(m+1)}(x) + (m + 1)(2\mu - m) f^{(m)}(x)}{a + bx^2}.$$

Im speciellen Falle $x = 0$ wird bei geraden n

$$f^{(n)}(0) = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (n-1) \mu(\mu-1)(\mu-2) \cdots (\mu - [\tfrac{1}{2}n - 1]) a^{\mu - \frac{1}{2}n} (2b)^{\frac{1}{2}n},$$

dagegen bei ungeraden n

$$f^{(n)}(0) = 0.$$

3. Um die Function

$$f(x) = \frac{2a}{(\sqrt{a+bx}+\sqrt{a})\sqrt{a+bx}}$$

mehrmals zu differenzieren, schreibt man erst

$$f(x) = \frac{2a}{b} \cdot \frac{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}}{x\sqrt{a+bx}},$$

multiplicirt mit $x\sqrt{a+bx}$ und differenzirt vorläufig einmal; nach gehöriger Reduction findet sich

$$2(ax+bx^2)f'(x) + (2a+3bx)f(x) = 2a.$$

Durch $(m+1)$ malige Differentiation folgt nun die Recursionsformel

$$2x(a+bx)f^{(m+2)}(x)$$

$$= [(2m+4)a + (4m+7)bx]f^{(m+1)}(x) + (m+1)(2m+3)bf^{(m)}(x).$$

Für den speciellen Fall $x = 0$ ergiebt sich wegen $f(0) = 1$

$$f^{(n)}(0) = (-1)^n\, 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n\, \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdots (2n+2)} \left(\frac{b}{a}\right)^n.$$

4. Aus der Gleichung

$$f(x) = (\sqrt{\alpha^2+\beta^2x^2}+\beta x)^\mu$$

erhält man durch einmalige Differentiation

$$\sqrt{\alpha^2+\beta^2x^2} \cdot f'(x) = \mu\beta f(x);$$

eine weitere Differentiation liefert (unter Rücksicht auf die Gleichung selber)

$$(\alpha^2+\beta^2x^2)f''(x) + \beta^2xf'(x) = \mu^2\beta^2f(x).$$

Nach m-maliger Differentiation dieser Gleichung findet man

$$(\alpha^2+\beta^2x^2)f^{(m+2)}(x)$$

$$= -(2m+1)\beta^2xf^{(m+1)}(x) + (\mu^2-m^2)\beta^2f^{(m)}(x).$$

Für $x = 0$ ergiebt sich bei geraden n:

$$f^{(n)}(0) = \mu^2(\mu^2-2^2)(\mu^2-4^2)\cdots(\mu^2-[n-2]^2)\,\alpha^{\mu-n}\beta^n,$$

dagegen bei ungeraden n:

$$f^{(n)}(0) = \mu(\mu^2-1^2)(\mu^2-3^2)\cdots(\mu^2-[n-2]^2)\,\alpha^{\mu-n}\beta^n.$$

5. Es sei

$$f(x) = \tfrac{1}{2}(arc\sin x)^2;$$

man findet dann

$$(1-x^2)f''(x) - xf'(x) = 1$$

und hieraus die Recursionsformel

$$(1-x^2)f^{(m+2)}(x) = (2m+1)xf^{(m+1)}(x) + m^2f^{(m)}(x).$$

Im speciellen Falle $x = 0$ wird

$$f^{(n)}(0) = [2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (n-2)]^2, \quad \text{für gerade } n,$$
$$f^{(n)}(0) = 0, \quad \text{für ungerade } n.$$

6. Aus der Gleichung

$$f(x) = \cos(\mu \operatorname{arc} \sin x)$$

folgt, wenn einmal differenzirt, dann mit $\sqrt{1-x^2}$ multiplicirt und nochmals differenzirt wird,

$$(1-x^2) f''(x) - x f'(x) = -\mu^2 f(x);$$

man findet nachher die Recursionsformel

$$(1-x^2) f^{(m+2)}(x) = (2m+1) x f^{(m+1)}(x) + (m^2 - \mu^2) f^{(m)}(x).$$

Diese giebt im speciellen Falle $x = 0$

$$f^{(n)}(0) = -\mu^2 (2^2 - \mu^2)(4^2 - \mu^2) \cdots ([n-2]^2 - \mu^2), \quad \text{für gerade } n,$$
$$f^{(n)}(0) = 0, \quad \text{für ungerade } n.$$

7. Eine ganz ähnliche Behandlung gestattet die Function

$$f(x) = \sin(\mu \operatorname{arc} \sin x).$$

Die Recursionsformel ist hier dieselbe wie vorhin, und für $x = 0$ wird

$$f^{(n)}(0) = 0, \quad \text{bei geraden } n,$$
$$f^{(n)}(0) = \mu (1^2 - \mu^2)(3^2 - \mu^2) \cdots ([n-2]^2 - \mu^2), \quad \text{bei ungeraden } n.$$

8. Es sei

$$f(x) = (1+x^2)^{\frac{1}{2}\mu} \cos(\mu \operatorname{arc} \tan x);$$

differenzirt man statt dieser Gleichung die folgende

$$(1+x^2)^{-\frac{1}{2}\mu} f(x) = \cos(\mu \operatorname{arc} \tan x),$$

multiplicirt nachher mit $1 + x^2$ und differenzirt noch einmal, so findet man

$$(1+x^2) f''(x) - 2(\mu - 1) x f'(x) + \mu(\mu - 1) f(x) = 0.$$

Daraus ergiebt sich die Recursionsformel

$$(1+x^2) f^{(m+2)}(x)$$
$$= -2(\mu - m - 1) x f^{(m+1)}(x) - (\mu - m)(\mu - m - 1) f^{(m)}(x).$$

Im speciellen Falle $x = 0$ wird

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{\frac{1}{2}n} \mu(\mu-1)(\mu-2) \cdots (\mu - [n-1]), \quad \text{für gerade } n,$$
$$f^{(n)}(0) = 0, \quad \text{für ungerade } n.$$

9. Ganz ähnlich lässt sich die Function

$$f(x) = (1 + x^2)^{\frac{1}{2}\mu} \sin(\mu \operatorname{arc} \tan x)$$

behandeln. Die Recursionsformel ist hier dieselbe wie vorhin; im Falle $x = 0$ ergiebt sich

$f^{(n)}(0) = 0,$ für gerade n,

$f^{(n)}(0) = (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)} \mu(\mu-1)(\mu-2)\cdots(\mu-[n-1]),$ für ungerade n.

§ 9.

Beispiele zur independenten Entwickelung höherer Differentialquotienten.

1. Um die gebrochene Function

$$\frac{1}{\alpha^2 - \beta^2 x^2}$$

zu differenziren, bringt man dieselbe auf die Form

$$\frac{1}{2\alpha}\left(\frac{1}{\alpha - \beta x} + \frac{1}{\alpha + \beta x}\right)$$

und wendet die Formel 2) in § 7 an; man erhält

$$D^n\left(\frac{1}{\alpha^2 - \beta^2 x^2}\right) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n\beta^n}{2\alpha}\left\{\frac{1}{(\alpha - \beta x)^{n+1}} + \frac{(-1)^n}{(\alpha + \beta x)^{n+1}}\right\}$$

oder auch

$$D^n\left(\frac{1}{\alpha^2 - \beta^2 x^2}\right) = \frac{(-1)^{n+1} 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n\beta^n}{2\alpha}\left\{\frac{1}{(\beta x - \alpha)^{n+1}} - \frac{1}{(\beta x + \alpha)^{n+1}}\right\}.$$

Vereinigt man die beiden Brüche rechter Hand, benutzt im Zähler den binomischen Satz und U zur Abkürzung, so folgt

$$U = (n+1)_1 (\beta x)^n + (n+1)_3 \alpha^2 (\beta x)^{n-2} + (n+1)_5 \alpha^4 (\beta x)^{n-4} + \cdots$$

$$D^n\left(\frac{1}{\alpha^2 - \beta^2 x^2}\right) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n\beta^n U}{(\alpha^2 - \beta^2 x^2)^{n+1}}.$$

2. Mittelst eines ähnlichen Verfahrens erhält man

$$D^n\left(\frac{x}{\alpha^2 - \beta^2 x^2}\right) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n\beta^n}{2\beta}\left\{\frac{1}{(\alpha - \beta x)^{n+1}} - \frac{(-1)^n}{(\alpha + \beta x)^{n+1}}\right\}$$

$$= (-1)^{n+1} 3 \cdot 4 \cdots n\beta^{n-1}\left\{\frac{1}{(\beta x - \alpha)^{n+1}} + \frac{1}{(\beta x + \alpha)^{n+1}}\right\}.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$V = (\beta x)^{n+1} + (n+1)_2 \alpha^2 (\beta x)^{n-1} + (n+1)_4 \alpha^4 (\beta x)^{n-3} + \cdots,$$

so ist auch

$$D^n\left(\frac{x}{\alpha^2 - \beta^2 x^2}\right) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \beta^{n-1} V}{(\alpha^2 - \beta^2 x^2)^{n+1}}.$$

3. Um die Function

$$\frac{1}{\alpha^2 + \beta^2 x^2}$$

zu differenziren, kann man die Zerlegung

$$\frac{1}{\alpha^2 + \beta^2 x^2} = \frac{1}{2\alpha\sqrt{-1}}\left(\frac{1}{\beta x - \alpha\sqrt{-1}} - \frac{1}{\beta x + \alpha\sqrt{-1}}\right)$$

benutzen und dann wie in Nr. 1) rechnen. Wird hierbei zur Abkürzung

$$U = (n+1)_1 (\beta x)^n - (n+1)_3 \alpha^2 (\beta x)^{n-2} + (n+1)_5 \alpha^4 (\beta x)^{n-4} - \cdots$$

gesetzt, so ergiebt sich

$$D^n\left(\frac{1}{\alpha^2 + \beta^2 x^2}\right) = \frac{(-1)^n 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \beta^n U}{(\alpha^2 + \beta^2 x^2)^{n+1}}.$$

Ein anderes Verfahren ist folgendes. Man führe den Hilfswinkel ω ein mittelst der Formel

$$\omega = arc\tan\frac{\alpha}{\beta x},$$

aus welcher folgt

$$x = \frac{\alpha}{\beta}\cot\omega, \quad dx = -\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{d\omega}{\sin^2\omega}, \quad d\omega = -\frac{\beta}{\alpha}\sin^2\omega\, dx,$$

und differenzire zunächst die identische Gleichung

$$\frac{1}{\alpha^2 + \beta^2 x^2} = \frac{1}{\alpha^2}\sin^2\omega;$$

man erhält

$$d\left(\frac{1}{\alpha^2 + \beta^2 x^2}\right) = \frac{2}{\alpha^2}\sin\omega\cos\omega\, d\omega = -\frac{2\beta}{\alpha^3}\sin^3\omega\cos\omega\, dx$$

oder

$$D\left(\frac{1}{\alpha^2 + \beta^2 x^2}\right) = -\frac{\beta}{\alpha^3}\sin^2\omega\sin 2\omega.$$

Differenzirt man zum zweiten Male und drückt $d\omega$ wieder durch dx aus, so findet man

$$D^2\left(\frac{1}{\alpha^2+\beta^2x^2}\right) = +\frac{2\beta^2}{\alpha^4} \sin^3\omega \sin 3\omega$$

und durch mehrmalige Anwendung desselben Verfahrens

$$D^n\left(\frac{1}{\alpha^2+\beta^2x^2}\right) = \frac{(-1)^n 1\cdot 2\cdot 3 \cdots n\beta^n}{\alpha^{n+2}} \sin^{n+1}\omega \sin(n+1)\omega.$$

Die allgemeine Giltigkeit dieser Formel beweist man mittelst des Schlusses von n auf $n+1$, d. h. man differenzirt die vorstehende Gleichung noch einmal und zeigt, dass hierdurch entsteht

$$D^{n+1}\left(\frac{1}{\alpha^2+\beta^2x^2}\right) = \frac{(-1)^{n+1} 1\cdot 2 \cdots (n+1)\beta^{n+1}}{\alpha^{n+3}} \sin^{n+2}\omega \sin(n+2)\omega;$$

die Formel gilt also für den $(n+1)^{\text{ten}}$ Differentialquotienten wenn sie für den n^{ten} richtig war, und da sie beim ersten Differentialquotienten gegolten hat, so ist sie nun successive richtig für den zweiten, dritten u. s. w. Setzt man für $\sin\omega$ und ω ihre ursprünglichen Werthe, so gelangt man zu dem Endresultate

$$D^n\left(\frac{1}{\alpha^2+\beta^2x^2}\right) = \frac{(-1)^n 1\cdot 2 \cdots n\beta^n}{\alpha\sqrt{(\alpha^2+\beta^2x^2)^{n+1}}} \sin\left[(n+1)\arctan\frac{\alpha}{\beta x}\right].$$

Aus der Vergleichung der beiden, auf verschiedenen Wegen erhaltenen Ausdrücke für denselben Differentialquotienten folgt noch

$$\left(\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2x^2}}{\beta x}\right)^{n+1} \sin\left[(n+1)\arctan\frac{\alpha}{\beta x}\right]$$

$$= (n+1)_1\frac{\alpha}{\beta x} - (n+1)_3\left(\frac{\alpha}{\beta x}\right)^3 + (n+1)_5\left(\frac{\alpha}{\beta x}\right)^5 - \cdots$$

oder, wenn $n = m-1$ gesetzt und wieder ω eingeführt wird,

$$\frac{\sin m\omega}{\cos^m\omega} = (m)_1 \tan\omega - (m)_3 \tan^3\omega + (m)_5 \tan^5\omega - \cdots,$$

worin ein oft gebrauchter goniometrischer Satz liegt.

4. Der n^{te} Differentialquotient von

$$\frac{x}{\alpha^2+\beta^2x^2}$$

lässt sich gleichfalls auf zwei verschiedene Arten entwickeln. Setzt man zur Abkürzung

$$V = (\beta x)^{n+1} - (n+1)_2 \alpha^2 (\beta x)^{n-1} + (n+1)_4 \alpha^4 (\beta x)^{n+3} - \cdots$$

so gelangt man zu der Formel

$$D^n\left(\frac{x}{\alpha^2+\beta^2 x^2}\right) = \frac{(-1)^n 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \beta^{n-1} V}{(\alpha^2+\beta^2 x^2)^{n+1}}.$$

Man kann aber auch, wenn ω seine vorige Bedeutung behält, von der identischen Gleichung

$$\frac{x}{\alpha^2+\beta^2 x^2} = \frac{1}{\alpha\beta} \sin\omega \cos\omega$$

ausgehen und findet dann

$$D^n\left(\frac{x}{\alpha^2+\beta^2 x^2}\right) = \frac{(-1)^n 1 \cdot 2 \cdots n \beta^{n-1}}{\alpha^{n+1}} \sin^{n+1}\omega \cos(n+1)\omega$$

oder

$$D^n\left(\frac{x}{\alpha^2+\beta^2 x^2}\right) = \frac{(-1)^n 1 \cdot 2 \cdots n \beta^{n-1}}{\sqrt{(\alpha^2+\beta^2 x^2)^{n+1}}} \cos\left[(n+1) \operatorname{arc\,tan} \frac{\alpha}{\beta x}\right].$$

Durch Vergleichung der beiden auf verschiedenen Wegen erhaltenen Ausdrücke für denselben Differentialquotienten folgt noch

$$\frac{\cos m\omega}{\cos^m \omega} = (m)_0 - (m)_2 \tan^2\omega + (m)_4 \tan^4\omega - \cdots$$

5. Die identische Gleichung

$$\frac{1}{a+2bx+cx^2} = \frac{1}{c\left[\dfrac{ac-b^2}{c^2} + \left(\dfrac{b}{c}+x\right)^2\right]}$$

führt zur Kenntniss des n^{ten} Differentialquotienten der links stehenden Function; man wendet hierbei die Formeln des 3. Beispiels so an, dass man

$$\alpha^2 = \frac{ac-b^2}{c^2}, \quad \beta = 1$$

und zugleich $\dfrac{b}{c} + x$ für x setzt, wodurch sich dx nicht ändert. Macht man Gebrauch von der Abkürzung

$$S = (n+1)_1 (b+cx)^n - (n+1)_3 (ac-b^2)(b+cx)^{n-2} \\ + (n+1)_5 (ac-b^2)^2 (b+cx)^{n-4} - \cdots,$$

so ergiebt sich

$$D^n\left(\frac{1}{a+2bx+cx^2}\right) = \frac{(-1)^n 1 \cdot 2 \cdots n S}{(a+2bx+cx^2)^{n+1}}.$$

Falls $ac - b^2$ positiv ist, kann man analog der zweiten Methode in Nr. 3) verfahren; wird nämlich

$$\omega = arc\tan\frac{\sqrt{ac-b^2}}{b+cx},$$

$$\sin\omega = \frac{\sqrt{ac-b^2}}{\sqrt{c(a+2bx+cx^2)}},\quad \cos\omega = \frac{b+cx}{\sqrt{c(a+2bx+cx^2)}}$$

gesetzt, so findet sich

$$D^n\left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{a+2bx+cx^2}\right)$$

$$=(-1)^n 1\cdot 2\cdots n\sqrt{\left(\frac{c}{a+2bx+cx^2}\right)^{n+1}}\sin\left[(n+1)arc\tan\frac{\sqrt{ac-b^2}}{b+cx}\right].$$

6. Aus der identischen Gleichung

$$\frac{b+cx}{a+2bx+cx^2} = \frac{\frac{b}{c}+x}{\frac{ac-b^2}{c^2}+\left(\frac{b}{c}+x\right)^2}$$

erhält man nach Nr. 4), wenn die Abkürzung

$$T = (b+cx)^{n+1} - (n+1)_2(ac-b^2)(b+cx)^{n-1}$$
$$+ (n+1)_4(ac-b^2)^2(b+cx)^{n-3} - \ldots$$

eingeführt wird

$$D^n\left(\frac{b+cx}{a+2bx+cx^2}\right) = \frac{(-1)^n 1\cdot 2\cdot 3\cdots nT}{(a+2bx+cx^2)^{n+1}}.$$

Im Falle $ac - b^2$ positiv ist, kann man die zweite Methode in Nr. 4 anwenden; sie giebt

$$D^n\left(\frac{b+cx}{a+2bx+cx^2}\right)$$

$$=(-1)^n 1\cdot 2\cdots n\sqrt{\left(\frac{c}{a+2bx+cx^2}\right)^{n+1}}\cos\left[(n+1)arc\tan\frac{\sqrt{ac-b^2}}{b+cx}\right].$$

7. Nach der Regel für die Differentiation der Producte findet man

$$D^n(e^{ax}\cos bx)$$
$$= \{(n)_0 a^n - (n)_2 a^{n-2}b^2 + (n)_4 a^{n-4}b^4 - \cdots\} e^{ax}\cos bx$$
$$- \{(n)_1 a^{n-1} b - (n)_3 a^{n-3}b^3 + \cdots\} e^{ax}\sin bx.$$

Ein anderer Weg zur Entwickelung desselben Differentialquotienten ist folgender. Man führe zwei Hilfsconstanten c und ϑ ein mittelst der Gleichungen

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad tan\vartheta = \frac{b}{a},$$

aus denen folgt

$$a = c\,cos\vartheta, \quad b = c\,sin\vartheta;$$

statt der Formel

$$D(e^{ax} cos\,bx) = e^{ax}(a\,cos\,bx - b\,sin\,bx)$$

lässt sich dann schreiben

$$D(e^{ax} cos\,bx) = c e^{ax} cos(bx + \vartheta).$$

Durch mehrmalige Anwendung desselben Verfahrens erhält man die Formel

$$D^n(e^{ax} cos\,bx) = c^n e^{ax} cos(bx + n\vartheta),$$

welche mittelst des Schlusses von n auf $n+1$ zu beweisen ist.

Vergleicht man die beiden für $D^n(e^{ax} cos\,bx)$ erhaltenen Ausdrücke, setzt in der entstehenden Gleichung $x = 0$ und $b = a\,tan\vartheta$, so erhält man dieselbe goniometrische Formel wie am Schlusse von Nr. 4.

8. Die höheren Differentialquotienten von $e^{ax} sin\,bx$ lassen sich gleichfalls nach den vorigen zwei Methoden entwickeln. Die erste giebt

$$D^n(e^{ax} sin\,bx)$$
$$= \{(n)_0 a^n - (n)_2 a^{n-2} b_4 + (n)_4 a^{n-4} b^4 - \cdots\} e^{ax} sin\,bx$$
$$+ \{(n)_1 a^{n-1} b - (n)_3 a^{n-3} b^3 + \} e^{ax} cos\,bx;$$

nach der zweiten Methode erhält man

$$D^n(e^{ax} sin\,bx) = c^n e^{ax} sin(bx + n\vartheta),$$

wo c und ϑ dieselbe Bedeutung haben wie in Nr. 7).

Vergleicht man die beiden für $D^n(e^{ax} sin\,bx)$ erhaltenen Ausdrücke, setzt in der entstehenden Gleichung $x = 0$ und $b = a\,tan\vartheta$, so kommt man auf die in Nr. 3) gefundene goniometrische Relation zurück.

§ 10.

Allgemeine Theoreme über höhere Differentialquotienten.

1. Um die höheren Differentialquotienten von $F\left(\frac{1}{x}\right)$ zu entwickeln, setze man für den Augenblick

$$\frac{1}{x} = y, \quad \text{mithin} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2};$$

es ist dann

$$\frac{dF\left(\frac{1}{x}\right)}{dx} = \frac{dF(y)}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = -F'(y)\,\frac{1}{x^2},$$

wobei $F'(y)$ so berechnet wird, als wenn y eine unabhängige Variabele wäre; zufolge des Werthes von y ergiebt sich dann

$$DF\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}F'\left(\frac{1}{x}\right).$$

Eine nochmalige Anwendung desselben Verfahrens liefert

$$D^2F\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}\cdot\frac{dF'(y)}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x^3}F'\left(\frac{1}{x}\right)$$

oder durch Wiedereinsetzung des Werthes von y

$$D^2F\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^4}F''\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{2}{x^3}F'\left(\frac{1}{x}\right).$$

Auf diese Weise fortgehend erhält man der Reihe nach

$$D^3F\left(\frac{1}{x}\right) = -\left\{\frac{1}{x^6}F'''\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{6}{x^5}F''\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{6}{x^4}F'\left(\frac{1}{x}\right)\right\},$$

$$D^4F\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^8}F^{IV}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{12}{x^7}F'''\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{36}{x^6}F''\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{24}{x^5}F'\left(\frac{1}{x}\right).$$

In den bisherigen Formeln scheint sich folgendes Gesetz auszusprechen:

$$D^nF\left(\frac{1}{x}\right) = (-1)^n\left\{\frac{1}{x^{2n}}F^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{(n-1)\cdot(n)_1}{x^{2n-1}}F^{(n-1)}\left(\frac{1}{x}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{(n-1)(n-2)\cdot(n)_2}{x^{2n-2}}F^{(n-2)}\left(\frac{1}{x}\right) + \cdots\right\};$$

man soll dasselbe mittelst des Schlusses von n auf $n+1$ beweisen.

a) Hiernach ist z. B.

$$D^n\left(e^{\frac{a}{x}}\right) = \frac{(-1)^n}{x^n}\left\{\left(\frac{a}{x}\right)^n + (n-1)\cdot(n)_1\left(\frac{a}{x}\right)^{n-1}\right.$$
$$\left. + (n-1)(n-2)\cdot(n)_2\left(\frac{a}{x}\right)^{n-2} + \cdots\right\}e^{\frac{a}{x}}.$$

b) Wählt man die Function $F(y)$ so, dass sich $D^nF\left(\frac{1}{x}\right)$ direct (d. h. ohne Hilfe der allgemeinen Formel) entwickeln lässt, so gelangt man nicht selten zu bemerkenswerthen algebraischen oder goniometrischen Sätzen. Z. B. für

$$F(y) = arc\,tan\,y, \quad F'(y) = \frac{1}{1+y^2},$$

$$F^{(k)}(y) = \frac{(-1)^{k-1}1 \cdot 2 \cdots (k-1)}{\sqrt{(1+y^2)^k}} \sin\left(k\,arc\,tan\,\frac{1}{y}\right)$$

ergiebt sich

$$F\left(\frac{1}{x}\right) = arc\,tan\,\frac{1}{x}, \quad DF\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2+1},$$

$$D^nF\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{(-1)^n 1 \cdot 2 \cdots (n-1)}{\sqrt{(x^2+1)^n}} \sin\left(n\,arc\,tan\,\frac{1}{x}\right);$$

wendet man nun die allgemeine Formel an, indem man schreibt

$$(-1)^n \frac{x^n}{1 \cdot 2 \cdots (n-1)} D^nF\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= \frac{(n)_1}{x} F'\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{(n)_2}{1 \cdot x^2} F''\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{(n)_3}{1 \cdot 2 \cdot x^3} F'''\left(\frac{1}{x}\right) + \cdots$$

und setzt man schliesslich $arc\,tan\,x = \theta$, so erhält man

$$\sin^n\theta \sin n\left(\tfrac{1}{2}\pi - \theta\right)$$

$$= (n)_1 \cos\theta \sin\theta - (n)_2 \cos^2\theta \sin 2\theta + (n)_3 \cos^3\theta \sin 3\theta - \cdots$$

Die Annahme $F(y) = \frac{1}{2} l(1+y^2)$ führt bei gleicher Behandlung zu dem entsprechenden Satze

$$\sin^n\theta \cos n\left(\tfrac{1}{2}\pi - \theta\right)$$

$$= (n)_0 - (n)_1 \cos\theta \cos\theta + (n)_2 \cos^2\theta \cos 2\theta - (n)_3 \cos^3\theta \cos 3\theta + \cdots$$

2. Setzt man für den Augenblick $x^2 = y$, so erhält man

$$\frac{dF(x^2)}{dx} = \frac{dF(y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = F'(y) \cdot 2x$$

oder

$$DF(x^2) = 2x\,F'(x^2);$$

die mehrmalige Anwendung desselben Verfahrens giebt

$$D^2F(x^2) = (2x)^2F''(x^2) + 2F'(x^2),$$
$$D^3F(x^2) = (2x)^3F'''(x^2) + 6 \cdot 2xF''(x^2),$$
$$D^4F(x^2) = (2x)^4F^{IV}(x^2) + 12(2x)^2F'''(x^2) + 12F''(x^2),$$
$$D^5F(x^2) = (2x)^5F^V(x^2) + 20(2x)^3F^{IV}(x^2) + 20 \cdot 2xF'''(x^2),$$

. . . .

und in diesen Gleichungen erkennt man inductorisch das Gesetz

$$D^n F(x^2) = (2x)^n F^{(n)}(x^2) + \frac{n(n-1)}{1}(2x)^{n-2}F^{(n-1)}(x^2)$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2}(2x)^{n-4}F^{(n-2)}(x^2)$$
$$+ \frac{n(n-1)\cdots(n-5)}{1\cdot 2\cdot 3}(2x)^{n-6}F^{(n-3)}(x^2) + \cdots,$$

welches mittelst des Schlusses von n auf $n+1$ zu beweisen ist.

a) Beispielsweise hat man nach dieser Formel

$$D^n\left(\frac{1}{\alpha+\beta x^2}\right)$$
$$= \frac{(-1)^n 1\cdot 2\cdots n(2\beta x)^n}{(\alpha+\beta x^2)^{n+1}}\left\{1-(n-1)_1\frac{\alpha+\beta x^2}{4\beta x^2}+(n-2)_2\left(\frac{\alpha+\beta x^2}{4\beta x^2}\right)^2-\cdots\right\}.$$

Ersetzt man die Grössen α, β, x durch

$$\frac{ac-b^2}{c},\quad c,\quad \frac{b}{c}+x,$$

was auf dx keinen Einfluss hat, und führt man die Abkürzung ein

$$\frac{c(a+2bx+cx^2)}{4(b+cx)^2} = u,$$

so erhält man

$$D^n\left(\frac{1}{a+2bx+cx^2}\right)$$
$$= \frac{(-1)^n 1\cdot 2\cdots n[2(b+cx)]^n}{(a+2bx+cx^2)^{n+1}}\{1-(n-1)_1 u+(n-2)_2 u^2-\cdots\}.$$

b) Die allgemeine Formel für $D^n F(x^2)$ liefert ferner

$$D^n\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha+\beta x^2}}\right)$$
$$= \frac{(-1)^n 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)(\beta x)^n}{\sqrt{(\alpha+\beta x^2)^{2n+1}}}\left\{1-\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}\frac{\alpha+\beta x^2}{\beta x^2}\right.$$
$$\left.+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4(2n-1)(2n-3)}\left(\frac{\alpha+\beta x^2}{\beta x^2}\right)^2-\cdots\right\}.$$

Benutzt man hier die nämlichen Substitutionen wie im vorigen Beispiele und setzt zur Abkürzung

$$\frac{c(a+2bx+cx^2)}{(b+cx)^2} = v,$$

so erhält man

$$D^n\left(\frac{1}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}\right)=\frac{(-1)^n 1\cdot 3\cdots(2n-1)(b+cx)^n}{\sqrt{(a+2bx+cx^2)^{2n+1}}}\left\{1-\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}v\right.$$

$$\left.+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4(2n-1)(2n-3)}v^2-\dots\right\}.$$

Diese Formel gestattet eine bemerkenswerthe Umwandlung. Aus der Gleichung

$$(z^2-1)^n=z^{2n}-(n)_1 z^{2n-2}+(n)_2 z^{2n-4}-\dots$$

folgt nämlich, wenn z als unabhängige Variabele angesehen wird,

$$D^n{}_z[(z^2-1)^n]=(n+1)(n+2)\cdots(2n)z^n\left\{1-\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}\frac{1}{z^2}\right.$$

$$\left.+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4(2n-1)(2n-3)}\frac{1}{z^4}-\dots\right\};$$

beachtet man erstens die identische Gleichung

$$(n+1)(n+2)\cdots(2n)=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots(2n)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots(2n)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}2^n$$

und setzt man zweitens rechter Hand

$$z=\frac{b+cx}{\sqrt{c(a+2bx+cx^2)}},$$

so wird $\frac{1}{z^2}=v$ und die eingeklammerte Summe identisch mit der nach Potenzen von v fortschreitenden Reihe; dies giebt folgende Relation

$$D^n{}_x\left(\frac{1}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}\right)=\frac{(-1)^n\sqrt{c^n}}{2^n\sqrt{(a+2bx+cx^2)^{n+1}}}D^n{}_z[(z^2-1)^n],$$

wobei nach geschehener Differentiation in Beziehung auf z der für z angegebene Ausdruck zu substituiren ist. Hieraus folgt specieller, wenn nach ausgeführter Differentiation $x=0$ gesetzt wird,

$$\left\{D^n{}_x\left(\frac{1}{\sqrt{1+2\varkappa\lambda x+\varkappa^2x^2}}\right)\right\}_{(0)}=\frac{(-1)^n\varkappa^n}{2^n}D^n{}_\lambda[(\lambda^2-1)^n].$$

c) Die allgemeine Formel für $D^nF(x^2)$ liefert ferner

$$D^n(\alpha+\beta x^2)^\mu$$

$$=\frac{\mu(\mu+1)\cdots(\mu-n+1)(2\beta x)^n}{(\alpha+\beta x^2)^{n-\mu}}\left\{1+\frac{n(n-1)}{1(\mu-n+1)}\frac{\alpha+\beta x^2}{4\beta x^2}\right.$$

$$\left.+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2(\mu-n+1)(\mu-n+2)}\left(\frac{\alpha+\beta x^2}{4\beta x^2}\right)^2+\dots\right\}.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$A_k = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-[2k-1])}{1\cdot 2\cdots k(\mu-n+1)(\mu-n+2)\cdots(\mu-n+k)},$$

$$u = \frac{c(a+2bx+cx^2)}{4(b+cx)^2},$$

so erhält man aus der vorigen Formel

$$D^n(a+2bx+cx^2)^\mu$$

$$= \frac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+1)[2(b+cx)]^n}{(a+2bx+cx^2)^{n-\mu}}(1+A_1u+A_2u^2+\cdots).$$

Bemerkenswerth ist der specielle Fall $a=1$, $b=0$, $c=-1$, $n=m-1$, $\mu=m-\frac{1}{2}$, welcher giebt

$$D^{m-1}(1-x^2)^{m-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{(-1)^{m-1}1\cdot 3\cdot 5\cdots(2m-1)x^m}{m}\left\{(m)_1\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - (m)_3\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)^3 \right.$$

$$\left. + (m)_5\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)^5 - \cdots\right\}.$$

Für $x = \cos\omega$ lässt sich die eingeklammerte Reihe mittelst der Formel 3) in § 9

$$(m)_1 \tan\omega - (m)_3 \tan^3\omega + (m)_5 \tan^5\omega - \cdots = \frac{\sin m\omega}{\cos^m\omega}$$

summiren, und es wird nach Restitution von $\omega = \operatorname{arc}\cos x$

$$D^{m-1}(1-x^2)^{m-\frac{1}{2}} = \frac{(-1)^{m-1}1\cdot 3\cdot 5\cdots(2m-1)}{m}\sin(m \operatorname{arc}\cos x).$$

d) Wählt man $F(y)$ so, dass $D^nF(x^2)$ unabhängig von der allgemeinen Formel entwickelt werden kann, so gelangt man zu irgend einem algebraischen oder goniometrischen Satze. Im Falle

$$F(y) = l(1-y)$$

erhält man z. B.

$$\frac{(x+1)^n+(x-1)^n}{(2x)^n}$$

$$= 1 - \frac{n}{1}\cdot\frac{x^2-1}{4x^2} + \frac{n(n-3)}{1\cdot 2}\left(\frac{x^2-1}{4x^2}\right)^2 - \frac{n(n-4)(n-5)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{x^2-1}{4x^2}\right)^3 + \cdots$$

oder wenn

$$\frac{x^2-1}{x^2} = z \text{ mithin } x = \frac{1}{\sqrt{1-z}}$$

gesetzt wird,

$$\frac{(1+\sqrt{1-z})^n+(1-\sqrt{1-z})^n}{2^n}$$

$$=1-\frac{n}{1}\left(\frac{z}{4}\right)+\frac{n(n-3)}{1\cdot 2}\left(\frac{z}{4}\right)^2-\frac{n(n-4)(n-5)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{z}{4}\right)^3+\cdots$$

worin der Coefficient von $(\frac{1}{4}z)^k$ durch den Ausdruck

$$\frac{n(n-k-1)(n-k-2)\cdots(n-2k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k}$$

gegeben ist.

Differenzirt man die vorige Gleichung in Beziehung auf z und lässt nachher $n+1$ an die Stelle von n treten, so findet man leicht

$$\frac{(1+\sqrt{1-z})^n-(1-\sqrt{1-z})^n}{2^n\sqrt{1-z}}=1-\frac{n-2}{1}\left(\frac{z}{4}\right)+\frac{(n-3)(n-4)}{1\cdot 2}\left(\frac{z}{4}\right)^2$$
$$-\frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{z}{4}\right)^3+\cdots$$

Zu ähnlichen Sätzen führt die Annahme

$$F(y)=l(1+y),$$

und zwar ergiebt sich, wenn nach Ausführung aller Differentiationen

$$arctan\,\frac{1}{x}=\theta$$

gesetzt wird,

$$2\cos n\theta=(2\cos\theta)^n-\frac{n}{1}(2\cos\theta)^{n-2}+\frac{n(n-3)}{1\cdot 2}(2\cos\theta)^{n-4}$$
$$-\frac{n(n-4)(n-5)}{1\cdot 2\cdot 3}(2\cos\theta)^{n-6}+\cdots$$

Hieraus folgt noch durch Differentiation in Beziehung auf θ

$$\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}=(2\cos\theta)^{n-1}-\frac{n-2}{1}(2\cos\theta)^{n-3}$$
$$+\frac{(n-3)(n-4)}{1\cdot 2}(2\cos\theta)^{n-5}-\cdots$$

3. Durch mehrmalige Differentiation von $F(\sqrt{x})$ erhält man folgende Gleichungen

$$DF(\sqrt{x})=\frac{F'(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}},$$

$$D^2F(\sqrt{x})=\frac{F''(\sqrt{x})}{(2\sqrt{x})^2}-2\frac{F'(\sqrt{x})}{(2\sqrt{x})^3},$$

$$D^3 F(\sqrt{x}) = \frac{F'''(\sqrt{x})}{(2\sqrt{x})^3} - 6\frac{F''(\sqrt{x})}{(2\sqrt{x})^4} + 12\frac{F'(\sqrt{x})}{(2\sqrt{x})^5},$$

$$D^4 F(\sqrt{x}) = \frac{F^{\mathrm{IV}}(\sqrt{x})}{(2\sqrt{x})^4} - 12\frac{F'''(\sqrt{x})}{(2\sqrt{x})^5} + 60\frac{F''(\sqrt{x})}{(2\sqrt{x})^6} - 120\frac{F'(\sqrt{x})}{(2\sqrt{x})^7},$$

die zu der inductorischen Formel führen

$$D^n F(\sqrt{x}) = \frac{F^{(n)}(\sqrt{x})}{(2\sqrt{x})^n} - \frac{n(n-1)}{1}\frac{F^{(n-1)}(\sqrt{x})}{(2\sqrt{x})^{n+1}} + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2}\frac{F^{(n-2)}(\sqrt{x})}{(2\sqrt{x})^{n+2}} - \cdots$$

diese ist mittelst des Schlusses von n auf $n+1$ zu beweisen.

a) Hiernach ergiebt sich z. B.

$$D^n\left(\frac{1}{\alpha+\beta\sqrt{x}}\right)$$

$$= \frac{(-1)^n 1\cdot 2\cdots n\beta^n}{(2\sqrt{x})^n(\alpha+\beta\sqrt{x})^{n+1}}\left\{1 + \frac{n-1}{1}\frac{\alpha+\beta\sqrt{x}}{2\beta\sqrt{x}} + \frac{(n+1)(n-2)}{1\cdot 2}\left(\frac{\alpha+\beta\sqrt{x}}{2\beta\sqrt{x}}\right)^2 + \cdots\right\},$$

wobei die Coefficienten unter der Form

$$\frac{(n+k-1)(n+k-2)\cdots(n+1)(n-k)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k}$$

enthalten sind. Das obige Resultat lässt sich noch dadurch etwas verallgemeinern, dass man β durch $\beta\sqrt{b}$ und zugleich x durch $\frac{a}{b}+x$ ersetzt.

b) Macht man Gebrauch von den Abkürzungen

$$B_k = \frac{(n+k-1)(n+k-2)\cdots n(n-1)\cdots(n-k)}{1\cdot 2\cdots k(\mu-n+1)(\mu-n+2)\cdots(\mu-n+k)},$$

$$w = \frac{\alpha+\beta\sqrt{x}}{2\beta\sqrt{x}},$$

so findet man mittelst der Formel für $D^n F(\sqrt{x})$

$$D^n(\alpha+\beta\sqrt{x})^\mu = \frac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+1)\beta^n}{(2\sqrt{x})^n(\alpha+\beta\sqrt{x})^{n-\mu}}(1 - B_1 w + B_2 w^2 - \cdots).$$

Ein bemerkenswerther specieller Fall hiervon ist

$$D^n(\alpha+\beta\sqrt{x})^{2n-1} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n}\frac{\beta}{\sqrt{x}}\left(\beta^2-\frac{\alpha^2}{x}\right)^{n-1}.$$

c) Wählt man $F(y)$ so, dass $D^n F(\sqrt{x})$ unabhängig von der allgemeinen Formel entwickelt werden kann, so gelangt man zu einem algebraischen oder goniometrischen Satze.

Ein Beispiel hierzu liefert die Annahme

$$F(y) = \tfrac{1}{2}l(y^2-1),$$

welche giebt

$$F'(y) = \frac{y}{y^2-1} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{y-1}+\frac{1}{y+1}\right),$$

$$F^{(k)}(y) = (-1)^{k-1}\,3\cdot 4\cdots(k-1)\left\{\frac{1}{(y-1)^k}+\frac{1}{(y+1)^k}\right\},$$

$$F(\sqrt{x}) = \tfrac{1}{2}l(x-1),\quad DF(\sqrt{x}) = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1}$$

u. s. w.

und schliesslich, wenn nach Ausführung aller Differentiationen

$$x = \left(\frac{u+v}{u-v}\right)^2$$

gesetzt wird,

$$(u+v)^n = u^n+v^n+(n)_1(u^{n-1}+v^{n-1})\frac{uv}{u+v}$$

$$+(n+1)_2(u^{n-2}+v^{n-2})\left(\frac{uv}{u+v}\right)^2+\cdots$$

$$\cdots+(2n-2)_{n-1}(u+v)\left(\frac{uv}{u+v}\right)^{n-1}.$$

Nimmt man dagegen

$$F(y) = \tfrac{1}{2}l(y^2+1),$$

und setzt nach Ausführung aller Differentiationen

$$arc\,tan\frac{1}{\sqrt{x}} = \theta,$$

so erhält man die goniometrische Formel

$$2^{n-1}cos^n\theta = cos\,n\theta+(n)_1\frac{cos\,(n-1)\,\theta}{2\,cos\,\theta}+(n+1)_2\frac{cos\,(n-2)\,\theta}{(2\,cos\,\theta)^2}+\cdots$$

$$\cdots+(2n-2)_{n-1}\frac{cos\,\theta}{(2\,cos\,\theta)^{n-1}}.$$

4. Durch mehrfache Differentiation von $F(x^\lambda)$ erhält man die Gleichungen

$$DF(x^\lambda) = \lambda x^{\lambda-1} F'(x^\lambda),$$
$$D^2F(x^\lambda) = \lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2}F'(x^\lambda) + \lambda^2 x^{2\lambda-2}F''(x^\lambda),$$
$$D^3F(x^\lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)x^{\lambda-3}F'(x^\lambda) + 3\lambda^2(\lambda-1)x^{2\lambda-3}F''(x^\lambda) + \lambda^3 x^{3\lambda-3}F'''(x^\lambda),$$

. . . .

Hieraus ist ersichtlich, dass $D^n F(x^\lambda)$ folgende Gestalt haben muss

$$D^n F(x^\lambda) = \frac{1}{x^n}\{C_1 x^\lambda F'(x^\lambda) + C_2 x^{2\lambda} F''(x^\lambda) + C_3 x^{3\lambda} F'''(x^\lambda) + \cdots\},$$

worin C_1, C_2, C_3, gewisse Coefficienten bedeuten, die nur von λ und n, nicht aber von x und der Natur der Function F abhängen. Zufolge des letzteren Umstandes kann man jene Coefficienten dadurch ermitteln, dass man für $F(x^\lambda)$ eine Function wählt, deren Differentiation direct (d. h. ohne die obige Formel) möglich ist, und nachher das Resultat mit der allgemeinen Formel vergleicht. Zu dem erwähnten Zwecke eignet sich z. B. die Annahme

$$F(y) = (1 - t + ty)^n,$$

worin t eine beliebige Constante sein möge. Benutzt man zur Abkürzung das Symbol

$$\mu(\mu-1)(\mu-2)\cdots(\mu-k+1) = \overset{k}{[\mu]},$$

so erhält man aus der obigen Formel

$$x^n D^n (1 - t + tx^\lambda)^n$$
$$= C_1 \overset{1}{[n]} x^\lambda (1 - t + tx^\lambda)^{n-1} t + C_2 \overset{2}{[n]} x^{2\lambda}(1 - t + tx^\lambda)^{n-2} t^2 + \cdots$$

Andererseits ist

$$F(x^\lambda) = (1 - t + tx^\lambda)^n$$
$$= (1-t)^n + (n)_1 (1-t)^{n-1} tx^\lambda + (n)_2 (1-t)^{n-2} t^2 x^{2\lambda} + \cdots$$

und durch directe Differentiation

$$x^n D^n (1 - t + tx^\lambda)^n$$
$$= (n)_1 \overset{n}{[\lambda]} (1-t)^{n-1} tx^\lambda + (n)_2 \overset{n}{[2\lambda]} (1-t)^{n-2} t^2 x^{2\lambda} + \cdots$$

Die Vergleichung der beiden, auf verschiedenen Wegen erhaltenen Resultate giebt eine Gleichung, die für jedes x und t richtig sein muss; setzt man in ihr zur Vereinfachung $x = 1$, so lautet sie

$$\overset{1}{[n]} C_1 t + \overset{2}{[n]} C_2 t^2 + \overset{3}{[n]} C_3 t^3 + \cdots$$
$$= (n)_1 \overset{n}{[\lambda]} (1-t)^{n-1} t + (n)_2 \overset{n}{[2\lambda]} (1-t)^{n-2} t^2 + (n)_3 \overset{n}{[3\lambda]} (1-t)^{n-3} t^3 + \cdots$$

Entwickelt man rechter Hand $(1-t)^{n-1}$, $(1-t)^{n-2}$, etc. und ordnet Alles nach Potenzen von t, so erhält man durch Vergleichung der Coefficienten von t, t^2, t^3, etc.

$$C_1 = \frac{1}{1}\overset{n}{[\lambda]},$$

$$C_2 = \frac{1}{1\cdot 2}\left\{\overset{n}{[2\lambda]} - 2\overset{n}{[\lambda]}\right\},$$

$$C_3 = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left\{\overset{n}{[3\lambda]} - 3\overset{n}{[2\lambda]} + 3\overset{n}{[\lambda]}\right\},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

und überhaupt

$$C_k = \frac{1}{1\cdot 2\cdots k}\left\{(k)_0\overset{n}{[k\lambda]} - (k)_1\overset{n}{[(k-1)\lambda]} + (k)_2\overset{n}{[(k-2)\lambda]} - \cdots\right\}.$$

Um das Resultat möglichst einfach darstellen zu können, setzen wir

$$L_k = (k)_0\overset{n}{[k\lambda]} - (k)_1\overset{n}{[(k-1)\lambda]} + (k)_2\overset{n}{[(k-2)\lambda]} - \cdots$$

und haben dann

$$D^n F(x^\lambda) = \frac{1}{x^n}\left\{\frac{L_1 x^\lambda}{1}F'(x^\lambda) + \frac{L_2 x^{2\lambda}}{1\cdot 2}F''(x^\lambda) + \frac{L_3 x^{3\lambda}}{1\cdot 2\cdot 3}F'''(x^\lambda) + \cdots\right\}.$$

Beispiele zu dieser allgemeinen Formel sind:

$$D^n(a+x^\lambda)^\mu = \frac{(a+x^\lambda)^\mu}{x^n}\left\{(\mu)_1 L_1\left(\frac{x^\lambda}{a+x^\lambda}\right) + (\mu)_2 L_2\left(\frac{x^\lambda}{a+x^\lambda}\right)^2 + \cdots\right\},$$

$$D^n l(a+x^\lambda) = \frac{1}{x^n}\left\{\tfrac{1}{1}L_1\left(\frac{x^\lambda}{a+x^\lambda}\right) - \tfrac{1}{2}L_2\left(\frac{x^\lambda}{a+x^\lambda}\right)^2 + \tfrac{1}{3}L_3\left(\frac{x^\lambda}{a+x^\lambda}\right)^3 - \cdots\right\},$$

$$D^n e^{x^\lambda} = \frac{1}{x^n}\left\{\frac{L_1 x^\lambda}{1} + \frac{L_2 x^{2\lambda}}{1\cdot 2} + \frac{L_3 x^{3\lambda}}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots\right\}e^{x^\lambda}.$$

Gelegentlich ergeben sich hieraus Eigenschaften der Grössen L_1, L_2, etc. Setzt man nämlich im ersten Beispiele $a=0$ und differenzirt linker Hand direct, so erhält man

$$\overset{n}{[\lambda\mu]} = (\mu)_1 L_1 + (\mu)_2 L_2 + \cdots + (\mu)_n L_n.$$

5. Differenzirt man die Function $F(e^x)$ mehrmals nach einander, so gelangt man zu folgenden Gleichungen

$$D\,F(e^x) = e^x F'(e^x),$$

$$D^2 F(e^x) = e^x F'(e^x) + e^{2x}F''(e^x),$$

$$D^3 F(e^x) = e^x F'(e^x) + 3e^{2x}F''(e^x) + e^{3x}F'''(e^x),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

deren allgemeine Form ist

$$D^n F(e^x) = C_1 e^x F'(e^x) + C_2 e^{2x} F''(e^x) + C_3 e^{3x} F'''(e^x) + \cdots$$

Um die von x und $F(e^x)$ unabhängigen Coefficienten C_1, C_2, etc. zu bestimmen, wenden wir die vorliegende Formel auf den Fall an

$$F(y) = (1 - t + ty)^n$$

und erhalten

$$D^n(1-t+te^x)^n = C_1 \overset{1}{[n]} e^x (1-t+te^x)^{n-1} t + C_2 \overset{2}{[n]} e^{2x}(1-t+te^x)^{n-2} t^2 + \cdots$$

Andererseits ist

$$F(e^x) = (1-t+te^x)^n = (1-t)^n + (n)_1 (1-t)^{n-1} te^x + (n)_2 (1-t)^{n-2} t^2 e^{2x} + \cdots$$

und durch directe Differentiation

$$D^n(1-t+te^x)^n = (n)_1 1^n (1-t)^{n-1} te^x + (n)_2 2^n (1-t)^{n-2} t^2 e^{2x} + \cdots$$

Die Vergleichung beider Resultate giebt, wenn zur Vereinfachung $x = 0$ gesetzt wird,

$$\overset{1}{[n]} C_1 t + \overset{2}{[n]} C_2 t^2 + \overset{3}{[n]} C_3 t^3 + \cdots$$
$$= (n)_1 1^n (1-t)^{n-1} t + (n)_2 2^n (1-t)^{n-2} t^2 + (n)_3 3^n (1-t)^{n-3} t^3 + \cdots$$

woraus durch Anordnung nach Potenzen von t folgt

$$C_1 = 1^n,$$
$$C_2 = \frac{1}{1 \cdot 2} \{2^n - 2 \cdot 1^n\},$$
$$C_3 = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \{3^n - 3 \cdot 2^n + 3 \cdot 1^n\}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

und überhaupt

$$C_k = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdots k} \{k^n - (k)_1 (k-1)^n + (k)_2 (k-2)^n - \cdots\}.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$E_k = (k)_0 k^n - (k)_1 (k-1)^n + (k)_2 (k-2)^n - \cdots,$$

so hat man die allgemeine Formel

$$D^n F(e^x) = \frac{E_1 e^x}{1} F'(e^x) + \frac{E_2 e^{2x}}{1 \cdot 2} F''(e^x) + \frac{E_3 e^{3x}}{1 \cdot 2 \cdot 3} F'''(e^x) + \cdots$$

Beispiele hierzu sind:

$$D^n (a + e^x)^\mu = (a + e^x)^\mu \left\{ (\mu)_1 E_1 \left(\frac{e^x}{a + e^x}\right) + (\mu)_2 E_2 \left(\frac{e^x}{a + e^x}\right)^2 + \cdots \right\},$$

$$D^n l(a + e^x) = \tfrac{1}{1} E_1 \left(\frac{e^x}{a + e^x}\right) - \tfrac{1}{2} E_2 \left(\frac{e^x}{a + e^x}\right)^2 + \tfrac{1}{3} E_3 \left(\frac{e^x}{a + e^x}\right)^3 - \cdots$$

Aus der ersten dieser beiden Formeln wird für $a = 0$

$$\mu^n = (\mu)_1 E_1 + (\mu)_2 E_2 + \cdots + (\mu)_n E_n,$$

worin eine Eigenschaft der Grössen E_1, E_2, etc. liegt. Substituirt man hier die Werthe

$$(\mu)_1 = \frac{\mu}{1}, \quad (\mu)_2 = \frac{\mu(\mu-1)}{1 \cdot 2} = \frac{\mu^2 - \mu}{1 \cdot 2}, \quad \cdots$$

ordnet Alles nach Potenzen von μ und vergleicht die beiderseitigen Coefficienten von μ, μ^2, $\cdots \mu^n$, so erhält man noch n specielle Relationen. Die erste derselben ist für $n > 1$

$$0 = \tfrac{1}{1} E_1 - \tfrac{1}{2} E_2 + \tfrac{1}{3} E_3 - \cdots,$$

und die letzte

$$1 = \frac{E_n}{1 \cdot 2 \cdots n}$$

d. i. vermöge des Werthes von E_n

$$(n)_0\, n^n - (n)_1 (n-1)^n + (n)_2 (n-2)^n - \cdots = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n.$$

Durch die Formel für $D^n F(e^x)$ erledigt sich auch die Differentiation aller Functionen von den Formen $f(\cos x)$, $f(\sin x)$, etc., weil (nach der Lehre von den Functionen complexer Variabelen) $\cos x$, $\sin x$, etc. durch Exponentialgrössen ausgedrückt werden können.

6. Differenzirt man $F(lx)$ mehrmals nach einander, so erhält man die Gleichungen

$$D F(lx) = \frac{1}{x} F'(lx),$$

$$D^2 F(lx) = \frac{1}{x^2} \{F''(lx) - F'(lx)\},$$

$$D^3 F(lx) = \frac{1}{x^3} \{F'''(lx) - 3F''(lx) + 2F'(lx)\},$$

. . . .

welche auf das allgemeine Bildungsgesetz

$$D^n F(lx) = \frac{1}{x^n} \{C_0 F^{(n)}(lx) - C_1 F^{(n-1)}(lx) + C_2 F^{(n-2)}(lx) - \cdots\}$$

hinweisen, worin die Coefficienten C_0, $C_1 \cdots C_{n-1}$ unabhängig von x sind. Zu ihrer Bestimmung dient die specielle Annahme $F(y) = e^{-\lambda y}$, $F(lx) = x^{-\lambda}$, bei welcher alle angedeuteten Differentiationen ausführbar werden; die entstehende Gleichung

$$\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)\cdots(\lambda+n-1)$$
$$= C_0\lambda^n + C_1\lambda^{n-1} + C_2\lambda^{n-2} + \cdots + C_{n-1}\lambda$$

giebt zu erkennen, dass man durch Ausführung der angedeuteten Multiplication combinatorische Formeln für die Coefficienten C_0, C_1, C_2, etc. aufstellen kann. Es folgt nämlich

$$\begin{aligned}
C_0 &= 1,\\
C_1 &= 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1),\\
C_2 &= 1\cdot 2 + 1\cdot 3 + 1\cdot 4 + \cdots + 1(n-1)\\
&\quad + 2\cdot 3 + 2\cdot 4 + \cdots + 2(n-1)\\
&\quad + 3\cdot 4 + \cdots + 3(n-1)\\
&\quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
&\quad + (n-2)(n-1),
\end{aligned}$$

u. s. w.

überhaupt ist C_1 die Summe der Zahlen $1, 2, \cdots (n-1)$, C_2 die Summe der aus den letzteren herstellbaren Combinationen zu je zweien (ohne Wiederholungen), wobei jede solche Ambe als Product angesehen wird, ferner ist C_3 die Summe der auf gleiche Weise gebildeten Ternen u. s. w. Diese Combinationsreihen lassen sich zwar summiren z. B.

$$C_0 = 1, \quad C_1 = \frac{n(n-1)}{2}, \quad C_2 = \frac{n(n-1)(n-2)(3n-1)}{24}, \cdots$$

jedoch ist das Bildungsgesetz von C_1, C_2, auf diesem Wege nicht zu entdecken*.

Dagegen kann man die erwähnten Coefficienten recursiv berechnen, wie sich folgendermassen zeigen lässt. Unter $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \cdots$ mögen die Ausdrücke verstanden werden, die aus C_1, C_2, C_3, $\cdots$ hervorgehen, wenn $n+1$ an die Stelle von n tritt, mithin

$$\Gamma_0 = 1, \quad \Gamma_1 = 1 + 2 + 3 + \cdots n = \frac{(n+1)n}{2},$$

$$\Gamma_2 = 1\cdot 2 + 1\cdot 3 + \cdots + (n-1)n = \frac{(n+1)n(n-1)(3n+2)}{24},$$

u. s. w.,

es ist dann

$$(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)\cdots(\lambda+n)$$
$$= \Gamma_0\lambda^n + \Gamma_1\lambda^{n-1} + \Gamma_2\lambda^{n-2} + \cdots + \Gamma_n.$$

* Der Verfasser hat dasselbe nach einem anderen Verfahren gefunden, s. „Compendium der höheren Analysis“ Theil II, S. 23.

Setzt man $\lambda - 1$ für λ und multiplicirt beiderseits mit $\frac{\lambda + n}{\lambda}$, so erhält man

$$(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)\cdots(\lambda+n)$$
$$= \frac{\lambda+n}{\lambda}\{\Gamma_0(\lambda-1)^n + \Gamma_1(\lambda-1)^{n-1} + \cdots + \Gamma_n\}.$$

Die linken Seiten dieser beiden Gleichungen stimmen überein, folglich müssen auch die rechten Seiten gleich sein; entwickelt man nun $(\lambda-1)^n$, $(\lambda-1)^{n-1}$ etc. nach dem binomischen Satze für ganze positive Exponenten und ordnet Alles nach Potenzen von λ, so gelangt man durch Vergleichung der Coefficienten gleicher Potenzen von λ zu der Recursionsformel

$$k\Gamma_k = \tfrac{1}{2}(n+k)(n-k+1)_1\Gamma_{k-1} - \tfrac{1}{3}(2n+k)(n-k+2)_2\Gamma_{k-2}$$
$$+ \tfrac{1}{4}(3n+k)(n-k+3)_3\Gamma_{k-3} - \cdots,$$

woraus sich für $k = 1, 2, 3, \cdots$ der Reihe nach die Werthe von $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \cdots$ ergeben.

Für $F(y) = y^p$ erhält man bei umgekehrter Anordnung der Summanden

$$D^n(lx)^p = \frac{(-1)^{n-1}}{x^n}\{pC_{n-1}(lx)^{p-1} - p(p-1)C_{n-2}(lx)^{p-2}$$
$$+ p(p-1)(p-2)C_{n-3}(lx)^{p-3} - \cdots\}.$$

Ist p eine ganze positive Zahl, so müssen die Fälle $p > n$ und $p \leqq n$ unterschieden werden. Im ersten Falle enthält die Reihe n Glieder, im zweiten Falle verschwinden alle diejenigen Glieder, bei welchen die Anzahl der gemachten Differentiationen mehr als p beträgt, und es bleibt daher

$$D^n(lx)^p = \frac{(-1)^{n-1}}{x^n}\{pC_{n-1}(lx)^{p-1} - p(p-1)C_{n-2}(lx)^{p-2} + \cdots$$
$$\cdots + (-1)^{p+1}p(p-1)\cdots 2\cdot 1\, C_{n-p}\}.$$

Daraus folgt z. B. wenn $(lx)^p$ kurz mit $f(x)$ bezeichnet wird

$$f^{(n)}(1) = (-1)^{n+p}\,1\cdot 2\cdot 3\cdots p\, C_{n-p}, \quad n \geqq p.$$

Capitel III.

Differentiation von Gleichungen zwischen mehreren Variabelen.

§ 11.

Beispiele zur Differentiation unentwickelter Functionen einer Variabelen.

Wenn zwischen zwei veränderlichen Grössen x und y eine Gleichung von der Form

$$f(x, y) = 0$$

besteht, so weiss man im Voraus, dass y eine Function von x sein muss, deren Natur aber so lange unbekannt bleibt, als man die gegebene Gleichung nicht nach x aufgelöst hat. Trotzdem kann die Gleichung differenzirt werden, wobei einfach zu berücksichtigen ist, dass eine Aenderung des x eine gleichzeitige Aenderung des y zur Folge hat. Man erhält dann eine Gleichung zwischen x, y, dx und dy, aus welcher sich $\frac{dy}{dx}$ finden lässt. Durch mehrmalige Anwendung desselben Verfahrens können auch die weiteren Differentialquotienten $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, etc. entwickelt werden.

Beispielsweise sei die gegebene Gleichung

$$Ax^2 + By^2 + 2Cxy + K = 0.$$

Nach einmaliger Differentiation ergiebt sich

$$2Ax\,dx + 2By\,dy + 2C(x\,dy + y\,dx) = 0$$

und hieraus folgt

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{Ax + Cy}{By + Cx}.$$

Differenzirt man wieder diese Gleichung, so erhält man nach einer kleinen Reduction

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{AB - C^2}{(By + Cx)^2}\left(y - x\frac{dy}{dx}\right)$$

und zufolge des vorigen Werthes von $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{(AB - C^2)(Ax^2 + By^2 + 2\,Cxy)}{(By + Cx)^3},$$

oder kürzer

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(AB - C^2)\,K}{(By + Cx)^3}.$$

Eine fernere Differentiation liefert

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{3\,(AB - C^2)\,K}{(By + Cx)^4}\left(B\frac{dy}{dx} + C\right)$$

und durch Substitution des Werthes von $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{3\,(AB - C^2)^2\,Kx}{(By + Cx)^5}.$$

Wie man dieses Verfahren fortsetzen kann, dürfte unmittelbar einleuchten. Da sich im vorliegenden Beispiele die ursprünglich gegebene Gleichung nach y auflösen lässt, so ist hier eine Probe auf die Richtigkeit der gefundenen Differentialquotienten möglich.

Weitere Beispiele sind folgende:

1) $$x^3 - 3\,cxy + y^3 = 0;$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{cy - x^2}{cx - y^2},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2\,(x^3 - 3\,cxy + y^3 + c^3)\,xy}{(cx - y^2)^3} = \frac{2\,c^3xy}{(cx - y^2)^3}.$$

2) $$x^5 - 5\,Cxy + y^5 = 0;$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{Cy - x^4}{Cx - y^4},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(2\,C^2 + 4\,x^3y^3)\,(x^5 + y^5) + 2\,C^3xy - 14\,Cx^4y^4}{(Cx - y^4)^3}$$

$$= \frac{6\,C(2\,C^2 + x^3y^3)\,xy}{(Cx - y^4)^3}.$$

3) $$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2-y^2}=c;$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x(\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2-y^2})}{y(\sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{x^2-y^2})}=\frac{c^2x}{2y^3},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{c^2(2y^4-3c^2x^2)}{4y^7}.$$

Hier kann man die gefundenen Formeln dadurch verificiren, dass man die gegebene Gleichung nach y auflöst und das erhaltene y direct differenzirt.

4) $$\sqrt{(x+y)^3}+\sqrt{(x-y)^3}=C;$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}=-\frac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{y},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{2x^3+(2x^2+y^2)\sqrt{x^2-y^2}}{y^3\sqrt{x^2-y^2}}.$$

5) $$(x^2+y^2)^2=2(Ax^2+By^2)$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x(x^2+y^2-A)}{y(x^2+y^2-B)}.$$

Um bei der Entwickelung des zweiten Differentialquotienten Weitläufigkeiten zu vermeiden, benutze man die Abkürzungen

$$s=x^2+y^2,$$

$$\frac{dy}{dx}=y', \quad \frac{ds}{dx}=s';$$

es ergiebt sich dann

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{(s-A)(s-B)(y-xy')+(A-B)xys'}{y^2(s-B)^2}.$$

Aus dem Werthe von y' und unter Rücksicht auf die Gleichung

$$s^2=2(Ax^2+By^2)$$

erhält man ferner

$$y-xy'=\frac{Ax^2+By^2}{y(s-B)},$$

$$s'=2(x+yy')=\frac{2(A-B)xy}{y(s-B)}$$

und durch Substitution dieser Ausdrücke

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{(s-A)(s-B)(Ax^2+By^2)+2(A-B)^2x^2y^2}{y^3(s-B)^3}.$$

Hierin ist

$$(s - A)(s - B)$$

$$= s^2 - (A + B)s + AB = 2(Ax^2 + By^2) - (A + B)(x^2 + y^2) + AB,$$

mithin

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{(A - B)(Ax^2 - By^2)(x^2 + y^2) + AB(Ax^2 + By^2)}{y^3(s - B)^3},$$

oder endlich, wenn $Ax^2 + By^2 = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^2$ gesetzt wird,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{(x^2 + y^2)[A(A - \frac{1}{2}B)x^2 + B(B - \frac{1}{2}A)y^2]}{y^3(x^2 + y^2 - B)^3}.$$

Da sich die gegebene Gleichung nach y auflösen lässt, so können die erhaltenen Differentialformeln verificirt werden.

6) $$e^y + ax^2 e^{-y} - 2bx = 0;$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2(b - axe^{-y})}{e^y - ax^2e^{-y}} = \frac{1}{x};$$

dies ist sehr leicht zu verificiren.

7) $$\frac{1}{2}l(x^2 + y^2) - lc = arc\,tan\,\frac{y}{x},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y}{x - y}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2(x^2 + y^2)}{(x - y)^3}.$$

8) $$\sqrt{x^2 + y^2} = c\,arc\,tan\,\frac{y}{x}.$$

Wird zur Abkürzung $\sqrt{x^2 + y^2} = r$ gesetzt, so ergiebt sich

$$\frac{dy}{dx} = \frac{cy + xr}{cx - yr},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(2c^2 + r^2)r^3}{(cx - yr)^3}.$$

9) $$(x^2 + y^2)\,arc\,tan\,\frac{y}{x} = c^2.$$

Benutzt man wieder die vorige Abkürzung, so erhält man

$$\frac{dy}{dx} = \frac{yr^2 - 2c^2x}{xr^2 + 2c^2y},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2c^2r^2(r^4 - 4c^4)}{(xr^2 + 2c^2y)^3}.$$

10. Setzt man abkürzend

$$\frac{dy}{dx} = y', \quad \frac{d^2y}{dx^2} = y'',$$

so kann man aus der Gleichung

$$arc\cos\frac{c}{\sqrt{x^2+y^2}} + arc\tan\frac{y}{x} = \frac{\sqrt{x^2+y^2-c^2}}{c}$$

die folgenden zwei Relationen ableiten

$$\frac{x+yy'}{y-xy'} = -\frac{c}{\sqrt{x^2+y^2-c^2}},$$

$$\frac{(x^2+y^2)\,y''+(y-xy')\,(1+y'^2)}{(y-xy')^2} = \frac{c\,(x+yy')}{\sqrt{(x^2+y^2-c^2)^3}}.$$

Allgemeine Bemerkung. Die in den vorigen Beispielen ausgeführten Rechnungsoperationen lassen sich in allgemeinen Symbolen darstellen, wenn man von dem Satze Gebrauch macht, dass das totale Differential einer Function zweier Variabelen gleich ist der Summe von den partiellen Differentialen derselben Function, also, falls z eine Function von x und y bedeutet,

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Aus der Gleichung

$$f(x,y) = 0 \text{ oder kurz } f = 0$$

folgt hiernach

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0$$

mithin

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}}.$$

Differenzirt man von Neuem, wobei zur Abkürzung

$$\frac{\partial f}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = q$$

sein möge, so erhält man

$$d\left(\frac{dy}{dx}\right) = -\frac{q\left(\dfrac{\partial p}{\partial x}dx + \dfrac{\partial p}{\partial y}dy\right) - p\left(\dfrac{\partial q}{\partial x}dx + \dfrac{\partial q}{\partial y}dy\right)}{q^2}$$

und durch Division mit dx

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{q\frac{\partial p}{\partial x} - p\frac{\partial q}{\partial x} + \left(q\frac{\partial q}{\partial y} - p\frac{\partial q}{\partial y}\right)\frac{dy}{dx}}{q^2}.$$

Nach Substitution des Werthes $\frac{dy}{dx} = -\frac{p}{q}$ wird hieraus

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{q^2\frac{\partial q}{\partial x} - pq\left(\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y}\right) + p^2\frac{\partial q}{\partial y}}{q^3};$$

setzt man hier die Werthe von p, q ein und beachtet, dass die Ausdrücke

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \text{ und } \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

gleich sind, so gelangt man zu der Formel

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^3}.$$

Auf diesem Wege kann man weiter gehen. Für den praktischen Gebrauch ist es übrigens vortheilhafter, die Rechnung (wie in den Beispielen) für jeden Fall besonders zu machen, einmal, weil man das Nachschlagen der allgemeinen Formeln spart, und andererseits, weil sich nicht selten vermöge der speciellen Form der Gleichung $f(x, y) = 0$ Abkürzungen bei Zeiten anbringen lassen.

§ 12.

Beispiele zur Differentiation unentwickelter Functionen mehrerer Variabelen.

Wenn zwischen drei veränderlichen Grössen x, y, z eine Gleichung von der Form

$$F(x, y, z) = 0$$

besteht, so weiss man im Voraus, das z eine Function von x und y sein muss, deren Natur so lange unbekannt bleibt, als man die Gleichung nicht auf z reducirt hat. Um ohne diese Auflösung die partiellen Differentialquotienten

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

zu finden, differenzirt man die Gleichung $F(x, y, z) = 0$ erst in der Art, dass man nur x und z als Variabele, y dagegen als Constante ansieht; man gelangt dann zu einer Gleichung zwischen x, y, z, ∂x und ∂z, aus welcher sich $\frac{\partial z}{\partial x}$ ergiebt. Sieht man dagegen y als Constante an, so führt eine ähnliche Rechnung zur Kenntniss von $\frac{\partial z}{\partial y}$. Durch weitere Differentiationen in Beziehung auf x oder y findet man die übrigen Differentialquotienten. Ganz analog ist das Verfahren zur Differentiation unentwickelter Functionen von drei oder mehr Variabelen.

Beispielsweise sei die gegebene Gleichung

$$2axz + 2byz + cz^2 + k = 0.$$

Differenzirt man zunächst unter Voraussetzung eines constanten y, so erhält man

$$a(x\partial z + z\partial x) + by\partial z + cz\partial z = 0,$$

mithin

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{az}{ax + by + cz}.$$

Auf gleiche Weise ergiebt sich bei constantem x

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{bz}{ax + by + cz}.$$

Wird nun $\frac{\partial z}{\partial x}$ partiell nach x differenzirt, so folgt

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{a}{(ax + by + cz)^2}\left\{az - (ax + by)\frac{\partial z}{\partial x}\right\}$$

oder vermöge des Werthes von $\frac{\partial z}{\partial x}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{a^2(2axz + 2byz + cz^2)}{(ax + by + cz)^3},$$

wofür kürzer geschrieben werden kann

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{a^2 k}{(ax + by + cz)^3}.$$

Durch eine sehr ähnliche Rechnung ergiebt sich, indem $\frac{\partial z}{\partial y}$ partiell nach y differenzirt wird,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{b^2 k}{(ax + by + cz)^3}.$$

Wird dagegen $\frac{\partial z}{\partial x}$ nach y differenzirt, so entsteht die Formel

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{a}{(ax + by + cz)^2}\left\{bz - (ax + by)\frac{\partial z}{\partial y}\right\}$$

$$= \frac{ab(2axz + 2byz + cz^2)}{(ax + by + cz)^3}$$

oder

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{abk}{(ax + by + cz)^3};$$

dasselbe erhält man, wenn $\frac{\partial z}{\partial y}$ nach x differenzirt wird. Wie man auf diese Weise alle partiellen Differentialquotienten von z entwickeln kann, dürfte unmittelbar einleuchten. Die totalen Differentiale von z ergeben sich nun mittelst der bekannten Formeln

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy,$$

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx\, dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2;$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

sie sind im obigen Falle:

$$dz = -\frac{z(adx + bdy)}{ax + by + cz},$$

$$d^2 z = -\frac{k(adx + bdy)^2}{(ax + by + cz)^3},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

Da sich hier die ursprüngliche Gleichung zwischen x, y, z nach z auflösen lässt, so können die gefundenen Resultate leicht verificirt werden.

Nach der angegebenen Methode sind folgende Beispiele zu behandeln:

1) $$z^3 + 3(ax + by)z + c^3 = 0;$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{az}{ax + by + z^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{bz}{ax + by + z^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2a^2(ax+by)z}{(ax+by+z^2)^3} = -\frac{2a^2(c^3+z^3)}{3(ax+by+z^2)^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2b^2(ax+by)z}{(ax+by+z^2)^3} = -\frac{2b^2(c^3+z^3)}{3(ax+by+z^2)^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{2ab(ax+by)z}{(ax+by+z^2)^3} = -\frac{2ab(c^3+z^3)}{3(ax+by+z^2)^3}.$$

2) $$ax^3 + by^3 + cz^2 + 3hxyz + k = 0;$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{ax^2+hyz}{cz^2+hxy}, \quad \frac{\partial z}{\partial z} = -\frac{by^2+hxz}{cz^2+hxy}.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2xz[ack+(abc+h^3)y^3]}{(cz^2+hxy)^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2yz[bck+(abc+h^3)x^3]}{(cz^2+hxy)^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = -\frac{2(abc+h^3)x^2y^2z + hk(hxy-cz^2)}{(cz^2+hxy)^3}.$$

3) $$(x^2+y^2+z^2)^2 = 2(Ax^2+By^2+Cz^2);$$

wird $x^2+y^2+z^2$ zur Abkürzung mit S bezeichnet, so ist

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x(S-A)}{z(S-C)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y(S-B)}{z(S-C)};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{(S-A)(S-C)[(S-A)x^2+(S-C)z^2]+2(A-C)^2x^2z^2}{z^3(S-C)^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{(S-B)(S-C)[(S-B)y^2+(S-C)z^2]+2(B-C)^2y^2z^2}{z^3(S-C)^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = -\frac{xy[(S-A)(S-B)(S-C)+2(A-C)(B-C)z^2]}{z^3(S-C)^3}.$$

4) $$e^{Ax+By+Cz} = A_1x + B_1y + C_1z;$$

setzt man zur Abkürzung $A_1x + B_1y + C_1z = S$, so erhält man

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{AS-A_1}{CS-C_1}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{BS-B_1}{CS-C_1};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{(AC_1-A_1C)^2S}{(CS-C_1)^3}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{(BC_1-B_1C)^2S}{(CS-C_1)^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = -\frac{(AC_1-A_1C)(BC_1-B_1C)S}{(CS-C_1)^3}.$$

5)
$$x^x y^y z^z = c;$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1+lx}{1+lz}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1+ly}{1+lz};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{x(1+lx)^2 + z(1+lz)^2}{xz(1+lz)^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{y(1+ly)^2 + z(1+lz)^2}{yz(1+lz)^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{(1+lx)(1+ly)}{z(1+lz)^3}.$$

Allgemeine Bemerkung. Um die vorigen Rechnungsoperationen allgemein darzustellen, sei

$$f(x, y, z) = 0$$

eine Gleichung zwischen drei Variabelen und es werde z als unentwickelte Function von x und y betrachtet. Differenzirt man zuerst unter Voraussetzung eines constanten y, so erhält man

$$\frac{\partial f}{\partial x}\partial x + \frac{\partial f}{\partial z}\partial z = 0,$$

mithin

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}}.$$

Auf analoge Weise findet sich

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}}.$$

Benutzt man für den Augenblick die Abkürzungen

$$\frac{\partial f}{\partial x} = u, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = v, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = w,$$

und differenzirt die erste der beiden Gleichungen

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{u}{w}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{v}{w}$$

partiell in Beziehung auf x, wobei zu beachten ist, dass u und w nicht nur x, sondern auch das von x abhängige z enthalten, so gelangt man zu der Formel

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{1}{w^2}\left\{w\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\right)-u\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right\}$$

$$= -\frac{1}{w^2}\left\{w\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial w}{\partial x}+\left(w\frac{\partial u}{\partial z}-u\frac{\partial w}{\partial z}\right)\frac{\partial z}{\partial x}\right\}.$$

Durch Substitution von $-\frac{u}{w}$ statt $\frac{\partial z}{\partial x}$ wird hieraus

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{1}{w^3}\left\{w^2\frac{\partial u}{\partial x}-wu\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)+u^2\frac{\partial w}{\partial z}\right\}$$

d. i. vermöge der Bedeutung von u und w

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-2\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^3}.$$

Auf gleiche Weise ergiebt sich, wenn $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{v}{w}$ nach y differenzirt wird,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-2\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^3}.$$

Differenzirt man endlich die Gleichung $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{u}{w}$ nach y, so erhält man

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = -\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial f}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}\right)+\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^3}.$$

Aehnliche Formeln lassen sich für implicite Functionen von drei oder mehr Variabelen aufstellen.

§ 13.

Beispiele zur Vertauschung der unabhängigen Variabelen.

I. Wenn in eine Gleichung von der Form $y = f(x)$ statt x eine neue unabhängige Variabele t eingeführt wird, die mit x durch die Gleichung $x = \varphi(t)$ verbunden ist, so erscheint auch y als Function von t, nämlich $y = f[\varphi(t)]$, oder kurz $y = \psi(t)$. Um nun auch $\frac{dy}{dx}$ durch t auszudrücken, braucht man nur die Gleichungen

$x = \varphi(t)$ und $y = \psi(t)$ zu differenziren und von den so entstandenen Differentialgleichungen den Quotienten zu bilden; auf analoge Weise erhält man die höheren Differentialquotienten $\frac{d^2y}{dx^2}$ u. s. w.

Es sei z. B.

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \quad \text{oder} \quad y = \frac{b\sqrt{a^2 - x^2}}{a}$$

und es werde t dadurch eingeführt, dass man setzt

$$x = \frac{2at}{1+t^2},$$

woraus folgt

$$y = \frac{b(1-t^2)}{1+t^2}.$$

Man hat jetzt durch Differentiation in Beziehung auf die unabhängige Variabele t

$$dx = \frac{2a(1-t^2)}{(1+t^2)^2}\,dt, \quad dy = -\frac{4bt}{(1+t^2)^2}\,dt,$$

mithin als Differentialquotient

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2bt}{a(1-t^2)}.$$

Eine zweite Differentiation giebt

$$d\left(\frac{dy}{dx}\right) = -\frac{2b(1+t^2)}{a(1-t^2)^2}\,dt;$$

dividirt man links mit dx, rechts mit dem vorhin für dx gefundenen Ausdrucke, so erhält man

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b}{a^2}\left(\frac{1+t^2}{1-t^2}\right)^3.$$

Auf gleiche Weise findet sich weiter

$$d\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = -\frac{12b}{a^2}\cdot\frac{(1+t^2)^2t}{(1-t^2)^4}\,dt,$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{6b}{a^3}\cdot\frac{(1+t^2)^4t}{(1-t^2)^5}$$

u. s. w.

Im vorliegenden Falle können diese Ergebnisse leicht verificirt werden. Aus der Gleichung

$$y = \frac{b\sqrt{a^2 - x^2}}{a}$$

erhält man nämlich direct

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{ab}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{3\,abx}{\sqrt{(a^2 - x^2)^5}}, \quad \ldots$$

und wenn man in die rechten Seiten dieser Formeln den Werth

$$x = \frac{2\,at}{1 + t^2}$$

substituirt, so kommt man auf die oben entwickelten Resultate.

Nach demselben Verfahren sind folgende Beispiele zu behandeln.

1. In die Gleichung

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \quad \text{oder} \quad y = \frac{b\sqrt{x^2 - a^2}}{a}$$

soll statt x eingeführt werden

$$x = \frac{a\,(t^2 + 1)}{2\,t};$$

die Differentialquotienten sind dann

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} \cdot \frac{t^2 + 1}{t^2 - 1}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b}{a^2}\left(\frac{2\,t}{t^2 - 1}\right)^3, \quad \text{u. s. w.}$$

2. Aus der Gleichung

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

folgt, wenn $x = a \cos\omega$ gesetzt wird,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a}\cot\omega, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b}{a^2 \sin^3\omega}, \quad \text{u. s. w.}$$

3. Aus der Gleichung

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

ergiebt sich für $x = a \sec\omega$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a}\csc\omega, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b}{a^2}\cot^3\omega, \quad \text{u. s. w.}$$

4. Wenn in der Gleichung

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$$

die Substitution $x = a \cos^3 \omega$ vorgenommen wird, so folgt

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a} \tan \omega, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{b}{3a^2} \sec^4 \omega \csc \omega.$$

5. Es sei

$$y = c \operatorname{arc} \cos \frac{c-x}{c} + \sqrt{2cx - x^2}$$

und werde substituirt

$$\operatorname{arc} \cos \frac{c-x}{c} = \chi;$$

die Differentialquotienten sind dann

$$\frac{dy}{dx} = \cot \tfrac{1}{2}\chi, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{1}{4c \sin^3 \frac{1}{2}\chi \cos \frac{1}{2}\chi}.$$

Allgemeine Bemerkung. Wenn überhaupt zwei Gleichungen von den Formen

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

stattfinden, so erhält man nach der vorigen Methode

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\varphi'(t)\psi''(t) - \varphi''(t)\psi'(t)}{\varphi'(t)^3},$$

$$\frac{d^3 y}{dx^2} = \frac{\varphi'(t)^2 \psi'''(t) - 3\varphi'(t)\varphi''(t)\psi''(t) + [3\varphi''(t)^2 - \varphi'(t)\varphi'''(t)]\psi'(t)}{\varphi'(t)^5}.$$

u. s. w.

Sehr häufig weiss man nur, dass x und y gewisse Functionen einer dritten Variabelen t sind, ohne diese Functionen explicite angeben zu können; die vorigen Formeln bleiben dann der Sache nach dieselben, weil sich aber die Werthe von $\varphi'(t)$, $\varphi''(t)$, etc. $\psi'(t)$, $\psi''(t)$, etc. nicht entwickeln lassen, so deutet man diese Differentiationen nur an und schreibt demgemäss

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{d^2x}{dt^2}\cdot\frac{dy}{dt}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\frac{d^3y}{dt^3} - 3\,\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}\cdot\frac{d^2y}{dt^2} + \left[3\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 - \frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^3x}{dt^3}\right]\frac{dy}{dt}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^5}$$

u. s. w.

Es sei z. B. y eine unbekannte Function von x und es werde $x = \frac{1}{t}$ gesetzt; dann ist

$$\frac{dy}{dx} = -\,t^2\,\frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = t^4\,\frac{d^2y}{dt^2} + 2t^3\,\frac{dy}{dt},$$

woraus u. A. folgt

$$x\,\frac{d^2y}{dx^2} + 2\,\frac{dy}{dx} = t^3\,\frac{d^2y}{dt^2}.$$

Die nachstehenden ähnlichen Aufgaben lassen sich mittelst desselben Verfahrens lösen.

6. Bedeutet y eine gewisse Function von x und wird $x = \frac{1}{2}t^2$ gesetzt, so ergiebt sich

$$2x\,\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = \frac{d^2y}{dt^2}.$$

7. In den Ausdruck

$$S = (a + bx)\,\frac{d^2y}{dx^2} + c\,\frac{dy}{dx}$$

soll man die neue unabhängige Variabele t mittelst der Substitution

$$a + bx = kt^m$$

einführen und nachher k, m so bestimmen, dass S die Form

$$S = t^n\,\frac{d^2y}{dt^2}$$

erhält. Für n findet sich der Werth $\frac{b-2c}{b-c}$.

8. Setzt man

$$x = \tfrac{1}{2}a\,(e^t - e^{-t}),$$

so wird

$$(a^2 + x^2)\,\frac{d^2y}{dx^2} + x\,\frac{dy}{dx} = \frac{d^2y}{dt^2}.$$

9. Die Substitution

$$x = a \sin \tau$$

giebt

$$(a^2 - x^2) \frac{d^2y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} = \frac{d^2y}{d\tau^2}.$$

10. Setzt man

$$x = a\sqrt{e^t - 1},$$

so findet man

$$\frac{x^2 + a^2}{x^2} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{x^2 - a^2}{x^3} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{4}{a^2} e^{-t} \cdot \frac{d^2y}{dt^2}.$$

II. Das bisherige Verfahren bleibt auch in dem Falle dasselbe, wo es darauf ankommt, die ursprünglichen Variabelen x und y durch zwei neue Variabelen t und u zu ersetzen. Wird nämlich in einer zwischen x und y bestehenden Gleichung $x = \varphi(t, u)$ und $y = \psi(t, u)$ gesetzt, so entsteht eine neue Gleichung zwischen t und u, in welcher man die eine dieser Grössen, etwa t, als die unabhängige, die andere als abhängige Variabele ansehen kann, und nunmehr handelt es sich darum, die Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$, etc. durch $\frac{du}{dt}, \frac{d^2u}{dt^2}$, etc. auszudrücken. Man differenzirt zu diesem Zweck die Gleichungen $x = \varphi(t, u)$ und $y = \psi(t, u)$ mit Rücksicht auf den Umstand, dass sowohl x als y gleichzeitig von t und u abhängt, und dividirt nachher dy durch dx. Auf analoge Weise bildet man die höheren Differentialquotienten.

Beispielsweise mögen die gegebenen Gleichungen sein

$$x = tu, \quad y = (1 - t)\, u;$$

man erhält dann durch Differentiation

$$dx = t\,du + u\,dt,$$

$$dy = (1 - t)\, du - u\,dt$$

und durch Division

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1 - t)\, du - u\,dt}{t\,du + u\,dt}$$

oder um anzudeuten, dass u von t abhängt,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1 - t)\frac{du}{dt} - u}{t\frac{du}{dt} + u}.$$

Bezeichnet man für den Augenblick $\frac{du}{dt}$ mit v, so gelangt man durch Differentiation der Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1-t)\,v - u}{tv + u} = \frac{v}{tv + u} - 1$$

zu der neuen Gleichung

$$d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{u\,dv - v\,(v\,dt + du)}{(tv + u)^2};$$

nach Division mit $dx = (tv + u)\,dt$ wird hieraus

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{u\dfrac{dv}{dt} - v\left(v + \dfrac{du}{dt}\right)}{(tv + u)^3}$$

oder zufolge der Bedeutung von v

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{u\dfrac{d^2u}{dt^2} - 2\left(\dfrac{du}{dt}\right)^2}{\left(t\dfrac{du}{dt} + u\right)^3}.$$

Wie man auf diese Weise fortrechnen kann, dürfte unmittelbar einleuchten.

11. Substituirt man, wie es in der analytischen Geometrie beim Uebergange von rechtwinkligen Coordinaten zu Polarcoordinaten geschieht,

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

und betrachtet r als Function von θ, so erhält man

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dr}{d\theta}\sin\theta + r\cos\theta}{\dfrac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\sin\theta},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-r\dfrac{d^2r}{d\theta^2} + 2\left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2}{\left(\dfrac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\sin\theta\right)^3},$$

woraus z. B. folgt

$$\frac{\sqrt{\left[1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^3}}{\dfrac{d^2y}{dx^2}} = \frac{\sqrt{\left[r^2 + \left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2\right]^3}}{r^2 + 2\left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2 - r\dfrac{d^2r}{d\theta^2}}.$$

12. Die Substitution*

$$x = c\,\frac{\sin(\theta+\eta)}{\sin(\theta-\eta)}, \quad y = 2c\,\frac{\sin\theta \sin\eta}{\sin(\theta-\eta)}$$

giebt, wenn η als Function von θ angesehen wird,

$$\frac{dy}{dx} = 2\,\frac{\frac{d\eta}{d\theta}\sin^2\theta - \sin^2\eta}{\frac{d\eta}{d\theta}\sin 2\theta - \sin 2\eta},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4\left[-\frac{d^2\eta}{d\theta^2}\sin\theta\sin\eta + 2\left(\frac{d\eta}{d\theta}\right)^2\sin\theta\cos\eta - 2\frac{d\eta}{d\theta}\cos\theta\sin\eta\right]\sin^3(\theta-\eta)}{c\left[\frac{d\eta}{d\theta}\sin 2\theta - \sin 2\eta\right]^3}.$$

---

* Die obigen Formeln vermitteln den Uebergang vom rechtwinkligen Coordinatensysteme zu demjenigen Systeme, welches in der Geodäsie beim „Visiren und Schneiden" benutzt wird. Die Grösse $2c$ ist hier die Länge der Standlinie, Θ und η sind die an derselben liegenden Winkel, beide nach derselben Drehungsrichtung gemessen. Man kann dieses System als das bipolare bezeichnen.

Capitel IV.

Die Discussion ebener Curven.

§ 14.

Allgemeine Regeln und Formeln.

Die Curve sei auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem der x und y bezogen und es möge zur Abkürzung

$$\frac{dy}{dx} = y', \quad \frac{d^2y}{dx^2} = y''$$

gesetzt werden; dann gelten folgende Regeln.

So lange y' positiv bleibt, so lange steigt die Curve; so lange y' negativ ist, so lange fällt sie; wechselt y' durch Null hindurchgehend sein Vorzeichen, so findet an der betreffenden Stelle eine Culmination statt und zwar eine obere oder untere, je nachdem der Zeichenwechsel von $+$ nach $-$, oder von $-$ nach $+$ vor sich geht.

So lange y'' positiv bleibt, so lange ist die Curve convex nach unten; so lange y'' negativ bleibt, so lange ist die Curve concav nach unten; jedem Zeichenwechsel von y'' entspricht ein Inflexionspunkt.

Bezeichnet τ den Winkel, welchen die Tangente im Punkte xy mit der x-Achse einschliesst, so ist (Fig. 1)

$$\tan\tau = y',$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\tau &= \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{dx}{ds}, \\ \sin\tau &= \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{dy}{ds}, \end{aligned}\right\} ds = \sqrt{dx^2+dy^2},$$

worin ds das Bogendifferential bedeutet. Ferner gelten die Formeln:

$$\text{Subtangente: } MT = \frac{y}{y'},$$

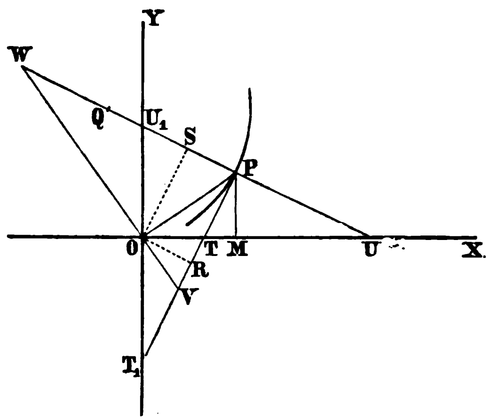
$$\text{Tangente: } PT = \frac{y\sqrt{1+y'^2}}{y'},$$

Abschnitt der Tangente auf der x-Achse: $OT = x - \dfrac{y}{y'}$,

„ „ „ „ „ y- „ $OT_1 = y - xy'$,

Entfernung der Tangente vom Coordinatenanfang: $OR = \dfrac{y - xy'}{\sqrt{1+y'^2}}$,

Fig. 1.



Projection des Radiusvector auf die Tangente: $PR = \dfrac{x + yy'}{\sqrt{1+y'^2}}$,

$$\text{Coordinaten von } R\text{: } -\frac{(x - xy')y'}{1+y'^2} \text{ und } \frac{y - xy'}{1+y'^2},$$

$$\text{Polarsubtangente: } OV = \frac{\sqrt{x^2+y^2}\,(y - xy')}{x + yy'},$$

$$\text{Polartangente: } PV = \frac{(x^2+y^2)\sqrt{1+y'^2}}{x + yy'},$$

$$\text{Coordinaten von } V\text{: } -\frac{y(y - xy')}{x + yy'} \text{ und } \frac{x(y - xy')}{x + yy'},$$

$$\text{Gleichung der Tangente: } \eta - y = y'(\xi - x).$$

Wenn bei unendlich wachsenden x

$$Lim\, y' = A, \quad Lim\,(y - xy') = B$$

endlich bestimmte Grössen sind, so ist

$$\text{Gleichung der Asymptote: } \eta = A\xi + B.$$

Ferner gelten die Formeln (siehe Fig. 1)

$$\text{Subnormale: } MU = yy',$$

$$\text{Normale: } PU = y\sqrt{1+y'^2},$$

$$\text{Abschnitt der Normale auf der } x\text{-Achse: } OU = x + yy',$$

$$\text{„ „ „ „ „ } y\text{- „ } OU_1 = y + \frac{x}{y'},$$

$$\text{Entfernung der Normale vom Coordinatenanfang: } OS = \frac{x+yy'}{\sqrt{1+y'^2}},$$

$$\text{Projection des Radiusvector auf die Normale: } PS = \frac{y-xy'}{\sqrt{1+y'^2}},$$

$$\text{Coordinaten von } S\text{: } \frac{x+yy'}{1+y'^2} \text{ und } \frac{(x+yy')y'}{1+y'^2},$$

$$\text{Polarsubnormale: } OW = \frac{\sqrt{x^2+y^2}\,(x+yy')}{y-xy'},$$

$$\text{Polarnormale: } PW = \frac{(x^2+y^2)\sqrt{1+y'^2}}{y-xy'},$$

$$\text{Coordinaten von } W\text{: } \frac{y(x+yy')}{y-xy'} \text{ und } -\frac{x(x+yy')}{y-xy'},$$

$$\text{Gleichung der Normale: } \eta - y = -\frac{1}{y'}(\xi - x).$$

Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes Q:

$$x - \frac{(1+y'^2)y'}{y''} \text{ und } y + \frac{1+y'^2}{y''},$$

$$\text{Krümmungshalbmesser: } \varrho = \frac{\sqrt{(1+y'^2)^3}}{y''},$$

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{d\sin\tau}{dx} = -\frac{d\cos\tau}{dy}.$$

Ist die Curve auf Polarcoordinaten r und θ bezogen und wird zur Abkürzung

$$\frac{dr}{d\theta} = r', \quad \frac{d^2r}{d\theta^2} = r''$$

gesetzt, so gelten die Formeln:

$$y' = \frac{r'\sin\theta + r\cos\theta}{r'\cos\theta - r\sin\theta} = \tan\tau,$$

$$y'' = \frac{-rr'' + 2r'^2 + r^2}{(r'\cos\theta - r\sin\theta)^3},$$

$$ds = \sqrt{(r\,d\theta)^2 + dr^2},$$

ferner, wenn φ den Winkel zwischen Radiusvector und Tangente, sowie ψ den Winkel zwischen Radiusvector und Normale bezeichnet,

$$tan\,\varphi = \frac{r}{r'}, \quad tan\,\psi = -\frac{r'}{r},$$

$$\text{Polarsubtangente: } OV = \frac{r^2}{r'},$$

$$\text{Polartangente: } PV = \frac{r\sqrt{r^2+r'^2}}{r'},$$

$$\text{Entfernung der Tangente vom Pol: } OR = \frac{r^2}{\sqrt{r^2+r'^2}},$$

$$\text{Polarsubnormale: } OW = r',$$

$$\text{Polarnormale: } PW = \sqrt{r^2+r'^2},$$

$$\text{Entfernung der Normale vom Pol: } OS = \frac{rr'}{\sqrt{r^2+r'^2}},$$

Rechtwinklige Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes:

$$r\cos\theta - \frac{(r^2+r'^2)(r'\sin\theta + r\cos\theta)}{r^2+2r'^2-rr''}$$

und

$$r\sin\theta + \frac{(r^2+r'^2)(r'\cos\theta - r\sin\theta)}{r^2+2r'^2-rr''},$$

$$\text{Krümmungshalbmesser: } \varrho = \frac{\sqrt{(r^2+r'^2)^3}}{r^2+2r'^2-rr''},$$

$$\frac{r}{\varrho} = \cos\psi + \frac{d\sin\psi}{d\theta}.$$

§ 15.

Beispiele von Curvendiscussionen. (Algebraische Curven.)

1. Die Parabel. Bezeichnet h den Halbparameter, so führt die Scheitelgleichung

$$y^2 = 2hx$$

zu folgenden Sätzen und Formeln.

Die Subtangente ist gleich der doppelten Abscisse; die Tangente bildet mit der nach dem Brennpunkt gezogenen Geraden (dem Brennstrahl des Berührungspunktes) denselben Winkel wie mit der Parabelachse. Fällt man vom Brennpunkte eine Senkrechte auf irgend eine Tangente, so liegt der Fusspunkt dieses Perpendikels auf der Scheiteltangente. Die Subnormale ist constant gleich dem Halbparameter.

Als Gleichung der Tangente hat man

$$h\xi - y\eta = -hx,$$

als Gleichung der Normale

$$y\xi + h\eta = (h + x)y.$$

Die Abschnitte, welche die Normale auf den Achsen der x und y bestimmt, sind

$$x + h \text{ und } y + \frac{xy}{h}.$$

Hinreichend verlängert schneidet die Normale zum zweiten Male die Parabel in einem Punkte $x_1 y_1$, dessen Coordinaten sind

$$x_1 = x + 2h + \frac{h^2}{x}, \quad y_1 = -\left(y + \frac{2h^2}{y}\right)$$

oder, wenn die Normale $\sqrt{h^2 + y^2}$ mit u bezeichnet wird,

$$x_1 = x + \frac{2hu^2}{y^2}, \quad y_1 = y - \frac{2u^2}{y}.$$

Die Entfernung der Punkte xy und $x_1 y_1$ oder P und P_1 beträgt

$$PP_1 = 2\frac{u^3}{y^2} = 2u \sec^2 \tau;$$

hieraus ergiebt sich eine einfache Construction des Punktes P_1.

Die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes sind

$$\xi = 3x + h, \quad \eta = -\sqrt{\frac{8x^3}{h}} = -\frac{y^3}{h},$$

wobei die erste Formel unter Zuhilfenahme der Normale eine einfache Construction des Krümmungsmittelpunktes giebt; der Krümmungsradius ist

$$\varrho = -\frac{\sqrt{(h^2 + y^2)^3}}{h^2} = -\frac{u^3}{h^2}.$$

Bezeichnet man die Coordinaten eines Punktes des Krümmungskreises mit X, Y und verbindet mit einander die Gleichungen

$$(X - \xi)^2 + (Y - \eta)^2 = \varrho^2, \quad Y^2 = 2hX,$$

so erhält man die Coordinaten X und Y oder besser x_2 und y_2 desjenigen Punktes P_2, in welchem der Krümmungskreis zum zweiten Male der Parabel begegnet; dieselben sind

$$x_2 = 9x, \quad y_2 = -3y.$$

Für die Länge von PP_2 d. h. der Sehne, welche der Parabel und dem Krümmungskreise gemeinschaftlich angehört, folgt hieraus

$$PP_2 = 4\frac{y\sqrt{h^2+y^2}}{h} = 4\frac{yu}{h} = 4y \csc\tau.$$

Der Punkt P_2 lässt sich entweder direct mittelst seiner Coordinaten oder auch als Durchschnitt zweier Geraden construiren; es gelten nämlich die beiden Gleichungen

$$\frac{x_2}{x} + \frac{y_2}{y} = 6, \quad \frac{y_2 - y}{x_2 - x} = -\tan\tau,$$

von denen die erste eine Gerade bedeutet, welche auf den Coordinatenachsen die Strecken $6x$ und $6y$ abschneidet, während die zweite eine Gerade charakterisirt, welche durch den Punkt P geht und mit der x-Achse den Winkel $180^0 - \tau$ einschliesst.

2. Die Ellipse. Geht man entweder von der Mittelpunktsgleichung aus

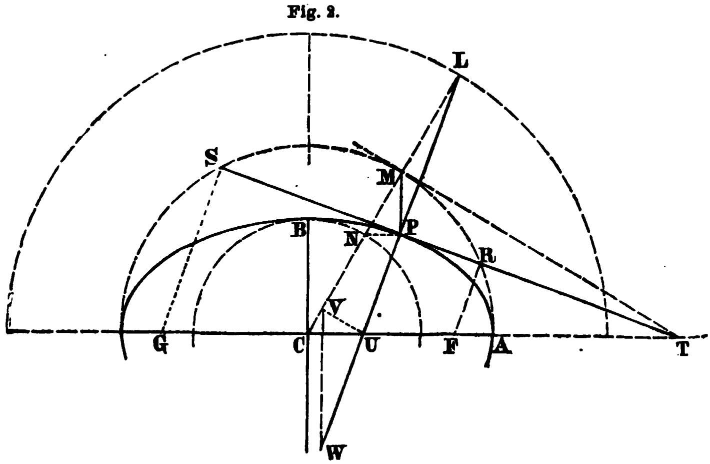
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

oder benutzt man statt derselben die beiden Gleichungen

$$x = a \cos\omega, \quad y = b \sin\omega,$$

worin ω den Winkel ACM (die sogenannte excentrische Anomalie) bedeutet (Fig. 2), so gelangt man zu folgenden Formeln, Sätzen

Fig. 2.



und Constructionen. Die Strecke CT, welche die Tangente von der Abscissenachse abschneidet, ist

$$CT = \frac{a^2}{x};$$

bezeichnet demnach M denjenigen Punkt des umschriebenen Kreises AB, welcher dieselbe Abscisse wie P besitzt, so gehen die Kreistangente MT und die Ellipsentangente PT durch einen und denselben Punkt der x-Achse, was eine einfache Tangentenconstruction giebt. Die Tangente halbirt den Nebenwinkel des von den Brennstrahlen FP und GP gebildeten Winkels FPG. Fällt man von den Brennpunkten Senkrechte auf die Tangente, so liegen die Fusspunkte R und S dieser Perpendikel auf dem umschriebenen Kreise.

Um die Normale unabhängig von der Tangente zu construiren, beschreibe man um den Ellipsenmittelpunkt einen Kreis mit dem Radius $a + b$ und verlängere CM bis zum Durchschnitte L mit diesem Kreise; LP ist dann die Normale.

Die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes und der Krümmungsradius bestimmen sich durch die Formeln

$$\xi = \frac{a^2 - b^2}{a^4} x^3, \quad \eta = -\frac{a^2 - b^2}{b^4} y^3,$$

$$\varrho = -\frac{\sqrt{(a^4 y^2 + b^4 x^2)^3}}{a^4 b^4} = -\frac{u^3}{h^2},$$

wobei u die Normale PU, und h den Halbparameter $\frac{b^2}{a}$ bedeutet. Ist ferner U_1 der Punkt, in welchem die Normale der verlängerten kleinen Halbachse begegnet, $PU_1 = u_1$, und bezeichnet p den Abstand der Tangente vom Mittelpunkte der Ellipse, so gilt auch die Relation

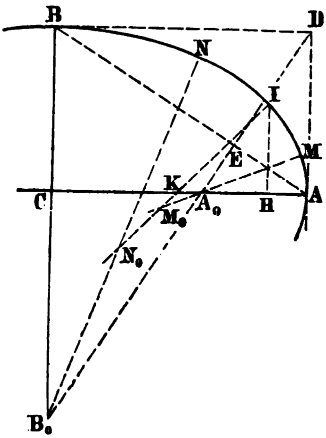
$$uu_1 = p\varrho.$$

Um den Krümmungsmittelpunkt zu construiren, legt man UV senkrecht zu CM und zieht durch V parallel zu BC eine Gerade, welche die verlängerte PU im Krümmungsmittelpunkte W schneidet.

Wenn es auf eine gute graphische Darstellung der Ellipse ankommt, so bestimmt man eine Reihe von Curvenpunkten mittelst des umschriebenen und des eingeschriebenen Kreises, construirt mittelst des Kreises vom Radius $a + b$ die zugehörigen Normalen und nimmt die aufeinander folgenden Durchschnitte derselben als Krümmungsmittelpunkte, was um so richtiger ist, je näher die Curvenpunkte an einander liegen; die Ellipse lässt sich dann mit beliebig weit gehender Genauigkeit aus Kreisbögen zusammensetzen.

Empfehlenswerth ist auch folgende Construction, deren Beweis aus den vorigen Formeln hergeleitet werden kann (Fig. 3). Man bilde zunächst das Rechteck $ACBD$ mit den Seiten $AC = a$, $BC = b$, und lege durch D senkrecht zur Diagonale AB eine Gerade, welche AB in E, AC in A_0, BC in B_0 schneidet; dann ist A_0 der Krümmungsmittelpunkt für den Scheitel A, und B_0 der Krümmungsmittelpunkt für den Scheitel B. Nimmt man ferner die Abscisse $CH = BE$ und die Ordinate $HI = AE$, so ist I ein Punkt der Ellipse und zwar derjenige, dessen Normale IK mit AC einen halben rechten Winkel bildet, also durch $HK = HI$ leicht zu construiren ist. Man beschreibt nun aus A_0 mit dem Halbmesser A_0A einen Kreis und sucht dann auf der verlängerten IK den Mittelpunkt M_0 desjenigen Kreises, der durch I geht und den vorigen Kreis von Innen berührt*. Auf gleiche Weise bestimmt man zwei sich berührende Kreise aus den Mittelpunkten B_0 und N_0. Die vier Kreisbögen AM, MI, IN, NB bilden zusammen eine Linie, die dem Ellipsenquadranten ausserordentlich nahe kommt.

Fig. 3.



3. Die Hyperbel. Man kann entweder die Mittelpunktsgleichung

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

direct benutzen oder statt deren die beiden Gleichungen

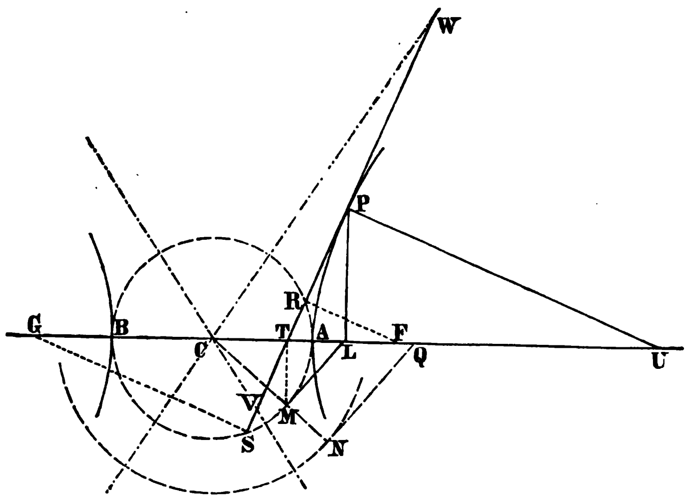
$$x = a\sec\omega, \quad y = b\tan\omega$$

anwenden, in denen ω den Winkel ACM (Fig. 4) bedeutet, so dass $x = CL$, $y = LP = NQ$ ist; es ergeben sich dann folgende Resultate. Der Durchschnitt T der Tangente mit der x-Achse ist der Fusspunkt des von M auf CA herabgelassenen Perpendikels;

* Die hierzu nöthige Construction wird man leicht finden; für das praktische Zeichnen ist es aber bequemer und sogar genauer, den Punkt M_0 durch Versuche zu bestimmen.

die Tangente halbirt den von den Brennstrahlen FP und GP gebildeten Winkel. Bezeichnet VW das zwischen den Asymptoten liegende Stück der Tangente, so ist $PV = PW$. Die von den Brennpunkten auf die Tangente gefällten Senkrechten schneiden die

Fig. 4.



Tangente in zwei Punkten R und S, welche auf dem über der Hauptachse beschriebenen Kreise liegen.

Für die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes und den Krümmungsradius gelten die Formeln

$$\xi = \frac{a^2 + b^2}{a^4} x^3, \quad \eta = -\frac{a^2 + b^2}{b^4} y^3,$$

$$\varrho = -\frac{\sqrt{(a^4 y^2 + b^4 x^2)^3}}{a^4 b^4} = -\frac{u^3}{h^2},$$

worin u die Normale PU und h den Halbparameter $\frac{b^2}{a}$ bedeutet. Aus der Bemerkung, dass die Formel für ξ durch $\xi = CU \cdot sec^2 \omega$ ersetzt werden kann, folgt eine einfache Construction des Krümmungsmittelpunktes.

4. Die centrischen Kegelschnitte. Stellt man die Gleichungen der Ellipse und Hyperbel unter der gemeinschaftlichen Form dar

$$Ax^2 + By^2 = 1,$$

so ergeben sich folgende Resultate. Die Tangente hat zur Gleichung

$$Ax\xi + By\eta = 1;$$

bezeichnet t den Abstand der Tangente vom Curvenmittelpunkte, so ist

$$t = \frac{1}{\sqrt{A^2x^2 + B^2y^2}}.$$

Die Normale wird durch folgende Gleichung bestimmt

$$By\xi - Ax\eta = (B - A)\,xy;$$

sie schneidet die Curve zum zweiten Male in einem Punkte P_1, dessen Coordinaten sind

$$x_1 = x - \frac{2\,Ax\,(A^2x^2 + B^2y^2)}{A^3x^2 + B^3y^2}, \quad y_1 = y - \frac{2\,By\,(A^2x^2 + B^2y^2)}{A^3x^2 + B^3y^2}.$$

Diese Formeln lassen sich einfacher darstellen, wenn man mit r die Länge desjenigen Radiusvector bezeichnet, welcher durch den Mittelpunkt der Curve parallel zur Normale gelegt werden kann; es ist nämlich

$$x_1 = x - 2\,Axr^2, \quad y_1 = y - 2\,Byr^2.$$

Das zwischen den Punkten xy und x_1y_1 enthaltene Stück der Normale hat die Länge

$$PP_1 = 2\,\frac{r^2}{t}.$$

Die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes sind

$$\xi = x - \frac{x}{Bt^2} = \frac{A\,(B - A)}{B}\,x^3, \quad \eta = y - \frac{y}{At^2} = \frac{B\,(A - B)}{A}\,y^3;$$

für den Krümmungshalbmesser gilt die Formel

$$\varrho = -\frac{\sqrt{(A^2x^2 + B^2y^2)^3}}{AB} = -\frac{1}{ABt^3}.$$

Bezeichnen X und Y die Coordinaten irgend eines Punktes des Krümmungskreises, so ist die Gleichung des letzteren

$$\left(X - x + \frac{x}{Bt^2}\right)^2 + \left(Y - y + \frac{y}{At^2}\right)^2 = \frac{1}{A^2B^2t^6}$$

oder

$$(X - x)^2 + (Y - y)^2 + 2\,\frac{x}{Bt^2}\,(X - x) + 2\,\frac{y}{At^2}\,(Y - y) = 0$$

und wenn $X - x = X_1$, $Y - y = Y_1$ gesetzt wird,

$$X_1^2 + Y_1^2 + 2\,\frac{Ax\,X_1 + By\,Y_1}{A\,Bt^2} = 0.$$

Verbindet man sie mit der Gleichung der Curve, nämlich $AX^2 + BY^2 = 1$ oder

$$AX_1^2 + BY_1^2 + 2(AxX_1 + ByY_1) = 0,$$

so erhält man die Coordinaten desjenigen Punktes P_2, in welchen der Krümmungskreis zum zweiten Male die Curve trifft. Zunächst findet sich

$$ABt^2(X_1^2 + Y_1^2) - (AX_1^2 + BY_1^2) = 0$$

oder

$$\frac{Y_1}{X_1} = \pm \frac{Ax}{By},$$

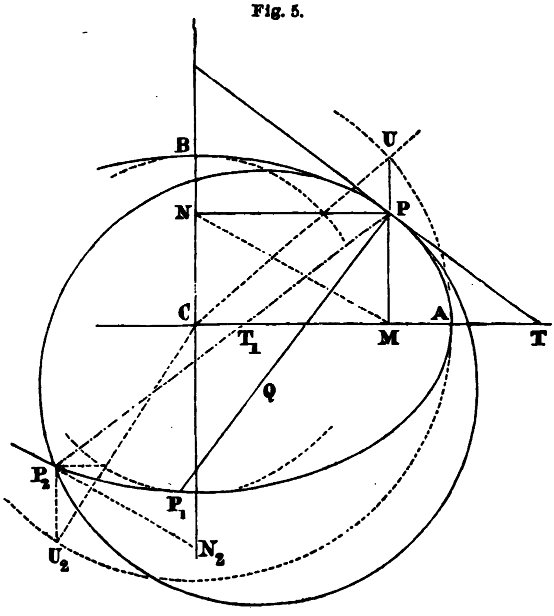
wo aber nur das obere Zeichen zu gebrauchen ist; die vorigen Gleichungen geben dann

$$X_1 = -4Bxy^2, \quad Y_1 = -4Ax^2y,$$

und hieraus folgt, wenn man x_2 und y_2 für X und Y schreibt,

$$x_2 = x - 4Bxy^2 = 4Ax^3 - 3x, \quad y_2 = y - 4Ax^2y = 4By^3 - 3y.$$

Fig. 5.



Die Länge der Sehne PP_2, welche der Curve und dem Krümmungskreise gemeinschaftlich angehört, beträgt

$$PP_2 = 4xy\sqrt{A^2x^2 + B^2y^2} = 4\frac{xy}{t}.$$

Zur Construction des Punktes P_2 empfehlen sich folgende zwei Gleichungen

$$\frac{x_2}{x} + \frac{y_2}{y} = -2, \quad \frac{y_2 - y}{x_2 - x} = -\tan\tau;$$

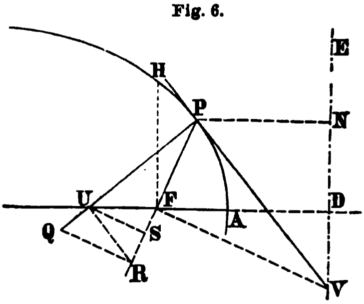
diesen entsprechend nimmt man (Fig. 5) auf der negativen Seite der y-Achse die Strecke $CN_2 = 2\,MP$ und legt durch N_2 eine Parallele zu MN, ferner schneidet man die Strecke $MT_1 = MT$ auf der Gegenseite von MT ab und zieht PT_1; die Verlängerung dieser Geraden trifft die vorhin construirte Parallele im Punkte P_2 Für die Ellipse ergiebt sich noch eine Eigenthümlichkeit. Werden nämlich die excentrischen Anomalien der Punkte P und P_2 mit ω und ω_2 bezeichnet, so folgt $\omega_2 = -3\omega$, mithin $arc\,AU_2 = 3\,arc\,AU$.

5. Die Kegelschnitte in Polarcoordinaten. Es sei (in Fig. 6) F ein Brennpunkt, DE die nächste Directrix eines Kegelschnittes, so stehen bekanntlich die Entfernungen PF und PN in constantem Verhältniss; hieraus ergiebt sich, wenn $\frac{PF}{PN} = \varepsilon$, $FD = g$ gesetzt und F als Anfang rechtwinkliger Coordinaten genommen wird,

$$y^2 = \varepsilon^2 g^2 - 2\varepsilon^2 g x + (\varepsilon^2 - 1)x^2$$

und in Polarcoordinaten für

Fig. 6.



$FP = r$, $\angle AFP = \theta$, $FH = h$,

$$r = \frac{h}{1 + \varepsilon\cos\theta}.$$

Hieraus können folgende Sätze abgeleitet werden. Der Endpunkt V der Polarsubtangente liegt auf der Directrix; FP ist das geometrische Mittel zwischen PN und FU; die Projection der Normale auf den Brennstrahl hat die constante Grösse $PS = h$. Errichtet man in U auf der Normale eine Senkrechte, welche den Brennstrahl in R schneidet, und legt dann RQ senkrecht zu FR, so schneidet RQ die Normale im Krümmungsmittelpunkte Q.

6. Die semicubische Parabel ist durch die Gleichung

$$y^2 = \tfrac{2}{3}\,\frac{x^3}{h}$$

bestimmt und lässt sich leicht construiren, wenn man von der gewöhnlichen Parabel ausgeht und die Proportion

$$h\sqrt{3} : \sqrt{2hx} = x : y$$

beachtet. Die Curve besteht aus zwei congruenten, vom Coordinatenanfange bis ins Unendliche gehenden Zweigen, welche symmetrisch gegen die x-Achse liegen; der obere Zweig ist durchaus convex nach unten. Zur Tangenten- und Normalenconstruction dienen die einfachen Beziehungen

$$\text{Subtangente} = \tfrac{2}{3}x, \quad \text{Subnormale} = \frac{x^2}{h}.$$

Die Gleichung der Tangente ist

$$\frac{\eta - y}{\xi - x} = \frac{x^2}{hy};$$

um die etwaigen Durchschnitte der Tangente mit der Curve zu finden, hat man die vorige Gleichung mit den Gleichungen $h\eta = \frac{2}{3}\xi^3$; $hy^2 = \frac{2}{3}x^3$ oder mit der hieraus folgenden

$$\frac{\eta - y}{\xi - x} = \frac{2}{3}\,\frac{\xi^2 + x\xi + x^2}{h(\eta + y)}$$

zu combiniren; dies giebt

$$\eta = \left(\frac{2}{3}\,\frac{\xi^2 + x\xi + x^2}{x^2} - 1\right)y$$

oder, wenn η durch ξ; y durch x ausgedrückt wird,

$$(\xi^3 - x^3)(4\xi - x) = 0;$$

die Tangente am Punkte xy schneidet also den unteren Zweig der Curve in dem Punkte, dessen Coordinaten $\frac{1}{4}x$ und $-\frac{1}{8}y$ sind. Die zwischen beiden Punkten enthaltene Strecke hat die Länge $\frac{3}{4}x\,sec\,\tau$.

Die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes sind

$$\xi = -\frac{x(x + 3h)}{h}, \quad \eta = \frac{2y(2x + h)}{x},$$

der Krümmungshalbmesser ist

$$\varrho = 2\,\frac{hy}{x}\,sec^3\tau;$$

aus diesen Formeln können verschiedene Constructionen des Krümmungsmittelpunktes hergeleitet werden.

7. Es soll die Curve untersucht werden, deren Gleichung ist

$$9ay^2 = (x - 3a)^2 x.$$

Die Curve besteht aus zwei congruenten Zweigen, von denen der eine durchaus convex, der andere durchaus concav nach unten ist. Der erste schneidet die x-Achse im Coordinatenanfang unter einem rechten Winkel, hat bei $x = a$, $y = -\frac{2}{3}a$ einen unteren Culminationspunkt, schneidet die Abscissenachse bei $x = 3a$ zum zweiten Male unter einem Winkel von 30^0 und steigt dann ins Unendliche. Zur Tangenten- und Normalenconstruction an einem Punkte desselben dient die einfache Formel

$$\sin\tau = \frac{x-a}{x+a}.$$

Die Gleichung der Tangente an einem Punkte xy des oberen (nach unten concaven) Zweiges ist

$$\eta = \frac{a-x}{2\sqrt{ax}}\xi + \frac{3a+x}{6}\sqrt{\frac{x}{a}};$$

verbunden mit der Gleichung des unteren Zweiges nämlich

$$\eta = \frac{\xi - 3a}{3}\sqrt{\frac{\xi}{a}}$$

giebt sie eine Gleichung, welche für $\xi = \frac{\zeta^2}{x}$ folgende Form annimmt

$$(\zeta + x)^2 [2\zeta - (x + 3a)] = 0.$$

Die Tangente am Punkte xy des oberen Zweiges schneidet hiernach den unteren Zweig in einem Punkte, dessen Coordinaten sind

$$x_1 = \frac{(x+3a)^2}{4x}, \quad y_1 = \frac{(x+3a)(x-3a)^2}{24x\sqrt{ax}}.$$

Der Krümmungshalbmesser ist

$$\varrho = \frac{(x+a)^2}{2a} = 2x\sec^2\tau,$$

was man leicht construiren kann.

8. In einem mit dem Radius $OA = a$ (Fig. 7) beschriebenen Kreise wird ein fernerer Radius OL unter dem beliebigen Winkel $AOL = \omega$ gezogen, L auf OA projicirt, die Projection M wieder auf OL nach N projicirt und die Ordinate $MP = MN$ genommen; die so construirten Punkte P liegen auf einer Curve, welche man entweder durch die beiden Gleichungen

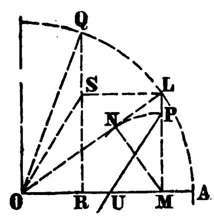
$$x = a \cos\omega, \quad y = a \cos\omega \sin\omega$$

oder durch die eine Gleichung

$$a^2 y^2 = x^2 (a^2 - x^2)$$

ausdrücken kann. Die Curve besteht aus vier congruenten Theilen und hat die Form einer Schleife (∞). Der zwischen den positiven Seiten der Coordinatenachsen liegende Quadrant geht unter einem halben rechten Winkel vom Coordinatenanfange O aus, erreicht bei $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $y = \frac{a}{2}$ seinen oberen Culminationspunkt und schneidet die Abscissenachse zum zweiten Male für $x = a$ unter einem rechten Winkel. Der Mittelpunkt O ist der einzig vorhandene Inflexionspunkt. Um für irgend einen Punkt P die Tangente oder Normale zu construiren, nehme man $\angle AOQ = 2\omega$, ziehe $QR \perp OA$, $LS \parallel OA$ und $PU \parallel SO$; es ist dann PU die Normale. Für den Krümmungsradius ergiebt sich

Fig. 7.

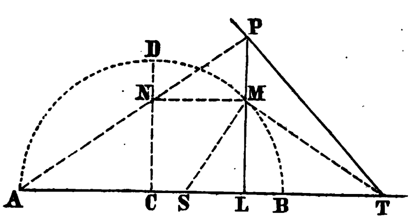


$$\varrho = \pm \frac{\sqrt{(2a^4 - 5a^2x^2 + 4x^4)^3}}{a^2 x (3a^2 - 2x^2)},$$

woraus für den Scheitel A und für den Culminationspunkt sehr einfache Werthe folgen.

9. Ueber dem Durchmesser $AB = 2a$ (Fig. 8) ist ein Kreis beschrieben und durch dessen Mittelpunkt C ein zweiter Durchmesser senkrecht zu AB gelegt. Irgend ein beliebiger Punkt M des Kreises wird auf beide Durchmesser projicirt, wodurch die Punkte L und N entstehen, endlich zieht man die Gerade AN, welche der nöthigenfalls verlängerten LM in P begegnet. Alle hiernach construirten Punkte P liegen in einer Curve, welche für $CL = x$, $LP = y$ durch die Gleichung

Fig. 8.



$$a^2 y^2 = (a + x)^3 (a - x)$$

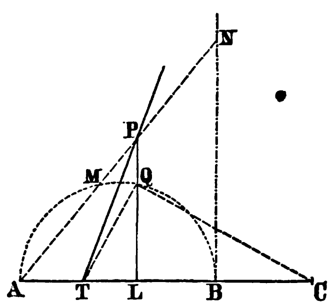
repräsentirt wird. Die Curve besteht aus zwei congruenten, über und unter AB liegenden Theilen, die in A und B zusammentreffen und eine geschlossene blattähnliche Figur bilden. Der obere Zweig berührt AB in A mit convexer Krümmung, hat bei $x = -\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)a$ einen Wendepunkt, geht unter dem Winkel von 45^0 durch D, erreicht bei $x = \frac{1}{2}a$ seinen oberen Culminationspunkt und schneidet zuletzt AB in B unter einem rechten Winkel. Um für irgend einen Curvenpunkt P die Tangente zu construiren, nehme man $CS = LB$, ziehe SM und dazu in M eine Senkrechte, welche AB in T schneidet; TP ist dann die Tangente. Für den Krümmungsradius findet man

$$\varrho = \mp \frac{\sqrt{8(a+x)(a^3 - 2a^2x + 2x^3)^3}}{a^2(a^2 + 2ax - 2x^2)},$$

wobei sich das obere Zeichen auf den oberen, das untere auf den unteren Zweig bezieht.

10. Die Cissoide (Fig. 9). Ueber dem Durchmesser $AB = 2a$ ist ein Kreis beschrieben und in B eine Tangente an denselben gelegt; durch A zieht man eine beliebige Gerade, welche den Kreis in M, die Tangente in N schneidet und nimmt die Strecke $AP = MN$. Alle so entstandenen Punkte P bilden eine Curve, deren Gleichung lautet

Fig. 9.



$$(2a - x)y^2 = x^3,$$

wobei A als Anfangspunkt rechtwinkliger Coordinaten und AB als Abscissenachse genommen ist. Die Curve besteht aus zwei congruenten, über und unter der Abscissenachse liegenden Zweigen; der obere Zweig geht von A aus, wo er die x-Achse berührt, und steigt mit convexer Krümmung ins Unendliche; die Tangente BN ist seine Asymptote. Um die Tangente an P zu construiren, nehme man $AC = 3a$, verbinde C mit dem Punkte Q, in welchem die Ordinate LP den Kreis schneidet und errichte auf CQ in Q eine Senkrechte, welche die Abscissenachse in T trifft; die Gerade TP ist die gesuchte Tangente.

Die Gleichung der Tangente ist

$$(3a - x)x^2\xi - (2a - x)^2 y\eta = ax^3;$$

verbindet man sie mit den Gleichungen $(2a - x)y^2 = x^3$ und $(2a - \xi)\eta^2 = \xi^3$, so erhält man die Gleichung

$$(\xi - x)^2 \{(8a - 3x)\xi - 2ax\} = 0;$$

die Tangente im Punkte xy schneidet demnach die Cissoide in einem zweiten Punkte $x_1 y_1$, dessen Coordinaten sind

$$x_1 = \frac{2ax}{8a - 3x}, \quad y_1 = -\frac{y}{2x} x_1$$

und der sich als Durchschnitt der Tangente und der Geraden $\eta = -\frac{y}{2x}\xi$ leicht construiren lässt. Die Entfernung der Punkte xy und $x_1 y_1$ beträgt

$$\frac{3ax}{\sqrt{(2a - x)(8a - 3x)}}.$$

Für den Krümmungshalbmesser ergiebt sich

$$\varrho = \pm \frac{a\sqrt{x(8a - 3x)^3}}{3(2a - x)^2},$$

wobei das obere Zeichen dem oberen, das untere dem unteren Zweige entspricht. Die Ordinate η des Krümmungsmittelpunktes hat den Werth

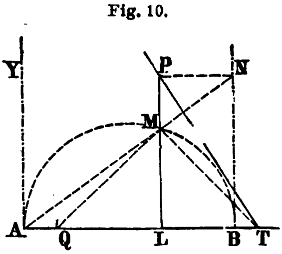
$$\eta = \tfrac{4}{3} \cdot \frac{2ay}{x},$$

welcher eine einfache Construction des Krümmungsmittelpunktes gestattet, nachdem die Normale bestimmt worden ist.

11. Ueber dem Durchmesser $AB = 2a$ (Fig. 10) ist ein Kreis beschrieben und in B eine Tangente an denselben gelegt; durch einen beliebigen Punkt M des Kreises zieht man ML senkrecht zu AB, ferner die Gerade AM, welche die Tangente in N schneidet, und nimmt endlich $LP = BN$. Alle so entstandenen Punkte P bilden eine Curve, deren Gleichung für $AL = x$, $LP = y$ ist,

$$xy^2 = 4a^2(2a - x).$$

Fig. 10.



Die Curve besteht aus zwei congruenten, über und unter der x-Achse liegenden Zweigen, welche die y-Achse zur gemeinschaftlichen Asymptote haben. Die Ordinaten des oberen Zweiges nehmen ab von $y = \infty$ bis $y = 0$, wo die Curve die x-Achse rechtwinklig schneidet; bei $x = \frac{3}{2}a$ hat jeder Zweig einen Wendepunkt. Um die Tangente an P zu construiren, nehme man

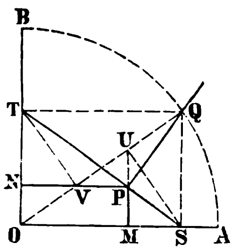
$LQ = a$, ziehe QM und darauf in M eine Senkrechte, welche der x-Achse in T begegnet; TP ist die gesuchte Tangente. Für den Krümmungshalbmesser ergiebt sich

$$\varrho = \pm \frac{\sqrt{(4a^4 + 2ax^3 - x^4)^3}}{2a^2x^2(3a - 2x)},$$

wobei das obere Zeichen für den oberen, das untere für den unteren Zweig gilt.

12. In einem mit dem Radius $OA = a$ beschriebenen Kreise (Fig. 11) sind zwei gegen einander senkrechte feste Durchmesser gezogen; irgend ein Punkt Q des Kreises wird erst auf OA, nachher auf OQ und dann wieder auf OA projicirt, wodurch der Reihe nach die Projectionen S, U, M entstehen; ebenso wird Q nach einander auf OB, OQ, OB projicirt, und schliesslich verlängert man MU und NV bis zu ihrem Durchschnitte P. Setzt man $\angle AOQ = \psi$, $OM = x$, $ON = y$, so gelten die Gleichungen

Fig. 11.



$$x = a\cos^3\psi, \quad y = a\sin^3\psi,$$

aus welchen folgt

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

oder in rationaler Form

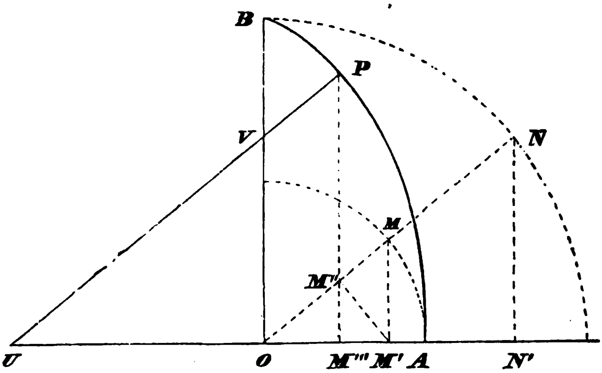
$$(x^2 + y^2 - a^2)^3 + 27a^2x^2y^2 = 0.$$

Die Curve besteht aus vier congruenten Theilen, welche zusammen eine sternförmige Figur bilden. Der zwischen den positiven Theilen der Coordinatenachsen liegende Quadrant geht von B, wo er die Ordinatenachse berührt, bis A, wo er die Abscissenachse berührt; er fällt mit convexer Krümmung. Ferner liegen die drei Punkte S, P, T in einer Geraden, welche die Curve in P berührt und die constante Länge $ST = a$ besitzt; die Gerade PQ ist die Normale der Curve im Punkte P, der Krümmungshalbmesser ist das Dreifache von PQ.

13. Auf der Abscissenachse ist die Strecke $OA = \frac{1}{2}a$, auf der Ordinatenachse die Strecke $OB = a$ genommen (Fig. 12), um den Coordinatenanfang O sind mit den Radien OA und OB Kreise beschrieben; eine beliebige, durch O gelegte Gerade schneide den ersten Kreis in M, den zweiten in N. Man projicirt nun den

Punkt M auf OA, die erhaltene Projection M' auf OM, die so entstandene Projection M'' wieder auf OA, wodurch der Punkt M''' entsteht, und construirt ausserdem die Projection N' von N auf

Fig. 12.



OA; endlich nimmt man auf der Verlängerung von $M'''\,M''$ die Strecke $M''P = N'N$. Alle so erhaltenen Punkte P liegen in einer Curve, die sich, wenn $\angle AOM = \psi$ gesetzt wird, entweder durch die beiden Gleichungen

$$x = \tfrac{1}{2} a \cos^3\psi, \quad y = \tfrac{1}{2} a\,(2 + \cos^2\psi) \sin\psi$$

oder durch die eine Gleichung

$$(x^2 + y^2 - a^2)^3 + \tfrac{27}{4} a^2 x^4 = 0$$

ausdrücken lässt.

Die Curve besteht aus vier congruenten Theilen, welche zusammen ein Oval bilden. Die zum Punkte P gehörende Normale liegt parallel zu OMN; das zwischen die Coordinatenachsen fallende Stück derselben besitzt die constante Länge a. Der Krümmungshalbmesser ist $= 3 \cdot OM''$.

14. Auf der Abscissenachse ist die Strecke $OA = 2a$ (Fig. 13), auf der Ordinatenachse die Strecke $OB = a$ genommen, um den Coordinatenanfang sind mit den Radien OA und OB Kreise beschrieben; eine beliebige, durch O gezogene Gerade schneide den ersten Kreis in M, den zweiten in N. Wie bei der vorigen Aufgabe projicirt man M dreimal nach M', M'', M''', ebenso N einmal nach N' und nimmt wieder $M''P = N'N$. Alle so erhaltenen Punkte P liegen in einer Curve, die sich entweder durch die zwei Gleichungen

$$x = 2a\cos^3\psi, \quad y = a(1 + 2\cos^2\psi)\sin\psi$$

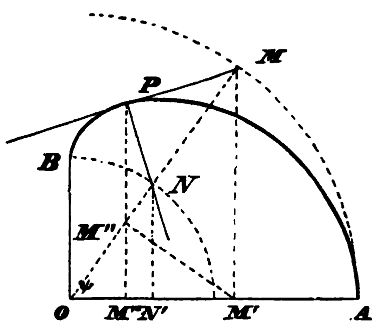
oder durch die eine Gleichung

$$(x^2 + y^2 - a^2)^3 - \tfrac{27}{4}a^4x^2 = 0$$

ausdrücken lässt.

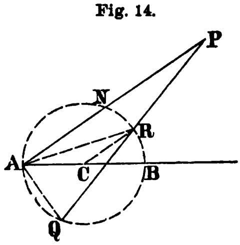
Die Curve besteht aus vier congruenten Theilen, ist geschlossen und besitzt in den Punkten 0, $+a$ und 0, $-a$ zwei nach Innen gekehrte Spitzen (Rückkehrpunkte). Die Tangente im Punkte P geht durch den Punkt M, die zugehörige Normale durch N; der Krümmungsradius ist $= \frac{3}{2}\,ON'$.

Fig. 13.



15. Die Cardioide (Fig. 14). In einem über dem Durchmesser $AB = 2a$ beschriebenen Kreise sind Sehnen AN gezogen, welche durch den festen Punkt A gehen, und auf jeder Sehne wird von N aus, immer nach derselben Seite hin, der Durchmesser $NP = AB$ abgeschnitten. Nimmt man A als Coordinatenanfang, AB als Abscissenachse und setzt $AP = r$, $\angle BAP = \theta$, so ist die Gleichung der Curve in Polarcoordinaten

Fig. 14.



$$r = 2a(1 + \cos\theta)$$

und in rechtwinkligen Coordinaten

$$(x^2 + y^2 - 2ax)^2 = 4a^2(x^2 + y^2).$$

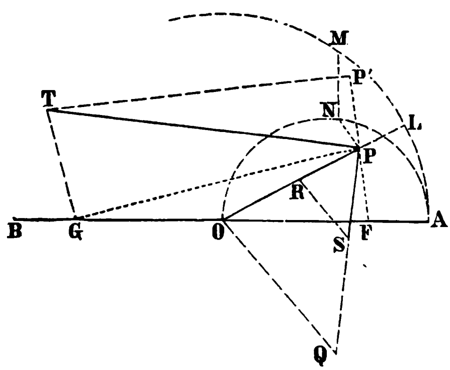
Die Curve wird durch die Abscissenachse in zwei congruente Theile getheilt. Der obere Zweig geht von A, wo er die x-Achse berührt, mit concaver Krümmung aufwärts, erreicht bei

$$\theta = \tfrac{1}{3}\pi, \quad x = 3a\cos\tfrac{1}{3}\pi, \quad y = 3a\sin\tfrac{1}{3}\pi$$

seinen oberen Culminationspunkt und schneidet zuletzt die Abscissenachse rechtwinklig im Punkte $x = 4a$, $y = 0$. Behufs der Normalenconstruction zieht man die zu AN senkrechte Kreissehne AQ; es ist dann PQ die Normale. Diese schneidet den Kreis ANB in einem Punkte R, dessen Radius $CR \parallel BP$, und wobei $AR = PR$ ist. Der Krümmungsradius für P beträgt zwei Drittheile von PQ.

16. Die Lemniscate (Fig. 15). Mit dem Radius $OA = a$ ist ein Kreis und über OA als Durchmesser ein zweiter Kreis beschrieben. Nach einem beliebigen Punkte L des ersten Kreises zieht man den Radius OL, nimmt $arc\, LM = arc\, AL$, legt durch M senkrecht zu OA eine Gerade, welche den zweiten Kreis in N schneidet und trägt auf OL die Strecke $OP = ON$ ab. Wählt man O zum Anfang, OA als Abscissenachse eines rechtwinkligen Coordinatensystems und setzt noch $OP = r$, $\angle AOP = \theta$, so hat man für die Curve der Punkte P in Polarcoordinaten die Gleichung

Fig. 15.



$$r^2 = a^2 \cos 2\theta$$

und in rechtwinkligen Coordinaten

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2).$$

Auf der Abscissenachse mögen ferner die Punkte F und G so bestimmt sein, dass $OF = OG = \frac{a}{\sqrt{2}}$ ist; die Punkte F und G heissen die Brennpunkte der Lemniscate; die beiden Brennstrahlen eines Lemniscatenpunktes P besitzen dann die Eigenschaft $FP \cdot GP = \overline{OF}^2$.

Die Curve besteht aus vier congruenten Theilen und hat die Gestalt einer Schleife (∞). Der zwischen den positiven Seiten der Coordinatenachsen liegende Quadrant geht unter einem halben rechten Winkel von O aus, steigt mit concaver Krümmung, erreicht bei

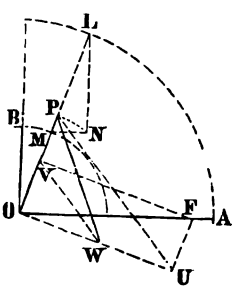
$$\theta = \frac{\pi}{6}, \quad r = \frac{a}{\sqrt{2}}, \quad x = \sqrt{\tfrac{3}{2}} \cdot \frac{a}{2}, \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{a}{2}$$

seinen oberen Culminationspunkt und schneidet endlich die x-Achse unter einem rechten Winkel bei $x = a$, $y = 0$. Der Mittelpunkt der Curve ist ihr einziger Inflexionspunkt. Zur Normalconstruction dient die Bemerkung, dass der Winkel zwischen Normale und Radiusvector das Doppelte von θ, also $\angle LOPQ = 2\theta$ ist. Um die

Tangente unabhängig von der Normale zu construiren, verlängert man den Brennstrahl FP um $PP' = FP$ und errichtet in P' eine Senkrechte auf FP'; diese Senkrechte schneidet die in G auf dem andern Brennstrahle GP errichtete Senkrechte in einem Punkte T, welcher der gesuchten Tangente angehört. Nimmt man auf der Normale die Strecke $PQ = a$, auf dem Radiusvector die Strecke $PR = \frac{1}{3}a$ und zieht durch R eine zu OQ parallele Gerade, so schneidet letztere die Normale im Krümmungsmittelpunkte S.

17. Um den Punkt O sind mit den Radien $OA = a$ und $OB = b$ (Fig. 16) zwei concentrische Kreise beschrieben; man zieht einen beliebigen Halbmesser, welcher den ersten Kreis in L, den zweiten in M schneidet und legt durch L eine Parallele zu OB, durch M eine Parallele zu der auf OB senkrechten OA. Beide Parallelen schneiden sich in N; endlich trägt man auf OL die Strecke $OP = ON$ ab. Nimmt man OA als Abscissen-, OB als Ordinatenachse und setzt noch $OP = r$, $\angle AOP = \theta$, so hat die Curve der Punkte P in Polarcoordinaten die Gleichung

Fig. 16.



$$r^2 = a^2 \cos^2\theta + b^2 \sin^2\theta,$$

dagegen in rechtwinkligen Coordinaten

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2,$$

oder auch, wenn x und y durch θ ausgedrückt werden,

$$x = \sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta} \cdot \cos\theta,$$

$$y = \sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta} \cdot \sin\theta.$$

Zur Abkürzung sei

$$\tfrac{1}{2}(a^2 + b^2) = A, \quad \tfrac{1}{2}(a^2 - b^2) = B;$$

man findet dann

$$x = \sqrt{A + B\cos 2\theta} \cdot \cos\theta, \quad y = \sqrt{A + B\cos 2\theta} \cdot \sin\theta,$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{A\cos\theta + B\cos 3\theta}{A\sin\theta + B\sin 3\theta},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{r(A^2 + 3B^2 + 4AB\cos 2\theta)}{(A\sin\theta + B\sin 3\theta)^3}.$$

Die Curve besteht aus vier congruenten, um den Mittelpunkt O herumliegenden Theilen; der von den positiven Seiten der Coordinatenachsen eingeschlossene Quadrant schneidet OA senkrecht in A und OB senkrecht in B. Im Falle $a \leqq b\sqrt{2}$ hat derselbe nur einen oberen Culminationspunkt (B) und keinen Wendepunkt; ist dagegen $a > b\sqrt{2}$, so wird B zum unteren Culminationspunkt und ausserdem existirt ein oberer Culminationspunkt an der Stelle

$$tan\,\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 - 2b^2}}, \quad r = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Zwischen beiden Culminationspunkten liegt ein Wendepunkt bei

$$tan\,\theta = \frac{a}{b}\sqrt{\frac{2a^2 - b^2}{a^2 - 2b^2}}, \quad r = \frac{\sqrt{3}\cdot ab}{\sqrt{2(a^2 + b^2)}}.$$

Um die Normale in einem beliebigen Punkte P zu construiren, bestimme man zunächst den festen Punkt F, dessen Abscisse $OF = \sqrt{a^2 - b^2}$ ist, lege durch O senkrecht zu OP eine Gerade und projicire F auf diese Senkrechte so wie auf OP, wodurch man die Punkte U und V erhält; endlich ziehe man $VW \parallel PU$, so ist PW die Normale.

18. Die Cassini'sche Curve. Es sind zwei feste Punkte F und G in der Entfernung $FG = 2c$ gegeben, und es wird der geometrische Ort des Punktes P gesucht, für welchen das Rechteck aus FP und GP eine constante Fläche $= h^2$ besitzt. Nimmt man den Mittelpunkt O von FG zum Anfang rechtwinkliger Coordinaten und OF zur x-Achse, so erhält man als Gleichung der Curve

$$(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) = h^4 - c^4$$

und in Polarcoordinaten

$$r^4 - 2c^2r^2\cos 2\theta = h^4 - c^4.$$

Aus der ersten Gleichung findet man

$$y^2 = \frac{[x^2 - (c^2 - h^2)]\,[c^2 + h^2 - x^2]}{c^2 + x^2 + \sqrt{h^4 + 4c^2x^2}},$$

und daran knüpfen sich folgende Bemerkungen. Für $h < c$ besteht die Curve aus zwei gesonderten Blättern; für $h = c$ geht sie in eine Lemniscate über, deren Halbachse $a = \sqrt{2}\cdot c$ ist; für $h > c$ bildet die Curve eine Ovalfigur mit den Halbachsen $a = \sqrt{h^2 + c^2}$, $b = \sqrt{h^2 - c^2}$.

Ferner gelten die Formeln

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x(c^2 - x^2 - y^2)}{y(c^2 + x^2 + y^2)} = \frac{x(c^2 - r^2)}{y(c^2 + r^2)},$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{h^2 r}{y(c^2 + r^2)},$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{h^4}{y^3} \cdot \frac{h^4 - c^4 + 3c^2(x^2 - y^2)}{(c^2 + x^2 + y^2)^3}.$$

Hiernach sind für $h \leqq c$ vier Culminationspunkte vorhanden an den Stellen

$$x = \pm \frac{\sqrt{4c^4 - h^4}}{2c}, \quad y = \pm \frac{h^2}{2c}, \quad r = c;$$

im Falle $c < h < \sqrt{2} \cdot c$ giebt es sechs Culminationspunkte bei

$$x = 0, \quad y = \pm \sqrt{h^2 - c^2} \text{ und } x = \pm \frac{\sqrt{4c^4 - h^4}}{2c}, \quad y = \pm \frac{h^2}{2c}, \quad r = c;$$

endlich für $\sqrt{2} \cdot c < h$ existiren zwei Culminationspunkte bei

$$x = 0, \quad y = \pm \sqrt{h^2 - c^2}.$$

Inflexionspunkte sind nur im Falle $c < h < \sqrt{2} \cdot c$ vorhanden und zwar gelten für deren Coordinaten die Gleichungen

$$x^2 - y^2 = -\frac{h^4 - c^4}{3c^2}, \quad x^2 + y^2 = \sqrt{\tfrac{1}{3}(h^4 - c^4)}$$

$$r = \sqrt[4]{\tfrac{1}{3}(h^4 - c^4)} = \sqrt{ab \tan 30^0}, \quad \cos 2\theta = -\frac{r^2}{c^2}.$$

Zur normalen Construction eignet sich am besten die Formel

$$\sin \psi = \frac{c^2}{h^2} \sin 2\theta,$$

worin ψ den Winkel zwischen Normale und Radiusvector bezeichnet. Der Krümmungshalbmesser ist

$$\varrho = -\frac{h^2 \sqrt{(x^2 + y^2)^3}}{h^4 - c^4 + 3c^2(x^2 - y^2)} = -\frac{2h^2 r^3}{c^4 - h^4 + 3r^4}.$$

19. Es sind gegeben ein fester Punkt F und eine feste Gerade DE, gesucht wird der geometrische Ort des Punktes P, für welchen das Rechteck aus seinen Abständen von F und DE eine constante Fläche besitzt. Nimmt man F zum Coordinatenanfang, die Senkrechte von F auf DE zur Abscissenachse, setzt die Länge dieser Senkrechten $= 2c$ und die constante Fläche $= h^2$, so hat man

$$r = \frac{h^2}{2c - x},$$

wonach sich die Curve leicht construiren lässt, und ferner

$$y^2 = \frac{h^4}{(2c - x)^2} - x^2 = \frac{(h^2 - 2cx + x^2)(h^2 + 2cx - x^2)}{(2c - x)^2}.$$

Für $h < c$ schneidet die Curve viermal die Abscissenachse in den Entfernungen

$$a_1 = -(\sqrt{c^2 + h^2} - c), \quad a_2 = c - \sqrt{c^2 - h^2},$$
$$a_3 = c + \sqrt{c^2 - h^2}, \qquad a_4 = \sqrt{c^2 + h^2} + c;$$

sie besteht dann aus einem blattförmig geschlossenen Theile und aus zwei ins Unendliche gehenden Zweigen, deren gemeinschaftliche Asymptote die Gerade DE ist. Im Falle $h = c$ reduciren sich jene vier Durchschnitte auf drei und die Curve bildet dann eine Schlinge um F; für $h > c$ existiren nur noch zwei Durchschnitte, denen zwei Zweige entsprechen. Die Abscissenachse theilt in allen Fällen die Curve in zwei congruente Theile.

Man findet weiter

$$y\frac{dy}{dx} = \frac{h^4}{(2c - x)^3} - x$$

oder wenn zur Abkürzung

$$\frac{c^4}{h^4} = m \text{ und } \frac{c}{2c - x} = \xi$$

gesetzt wird

$$y\frac{dy}{dx} = \frac{h^4}{c^3} \cdot \frac{\xi^4 - 2m\xi + m}{\xi}.$$

Nach bekannten algebraischen Lehren hat nun die Gleichung

$$\xi^4 - 2m\xi + m = 0$$

für $m > \frac{16}{27}$ zwei reelle, von einander verschiedene Wurzeln und zwei complexe Wurzeln; für $m = \frac{16}{27}$ werden die beiden reellen Wurzeln identisch; für $m < \frac{16}{27}$ sind alle Wurzeln imaginär. Derjenige Zweig der Curve, welcher durch die Gleichung

$$y = +\frac{\sqrt{h^4 - x^2(2c - x)^2}}{2c - x}$$

ausgedrückt wird, kann daher höchstens zwei Culminationspunkte besitzen. Ist nun erstens $h < c$, mithin $m > 1$, und wird

$$y\frac{dy}{dx} = \frac{h^4}{(2c-x)^3} - x = \varphi(x)$$

gesetzt, so ergiebt sich

$$\varphi(0) = \frac{h^4}{8c^3} > 0, \quad \varphi(\tfrac{1}{2}c) = \frac{16h^4 - 27c^4}{54c^3} < 0,$$

$$\varphi(a_2) = -2\left(\frac{a_2}{h}\right)^2 \sqrt{c^2-h^2} < 0, \quad \varphi(a_3) = +2\left(\frac{a_3}{h}\right)^2 \sqrt{c^2-h^2} > 0;$$

die Abscisse des ersten Culminationspunktes liegt demnach zwischen 0 und $\frac{1}{2}c$, die des zweiten zwischen a_2 und a_3; der letzteren entspricht aber kein reelles y, es existirt daher in dem oberen Curvenzweige nur ein oberer Culminationspunkt.

Für den Fall $h = c$ wird einfacher

$$\frac{dy}{dx} = \frac{c^3 - 7c^2x + 5cx^2 - x^3}{(2c-x)^2\sqrt{c^2+2cx-x^2}},$$

woraus sich für den oberen Zweig ein einziger Culminationspunkt ergiebt an der Stelle $x = 0{,}16071 \cdot c$.

Ist drittens $h > c$, so müssen die drei Unterfälle

$$c^4 < h^4 < \tfrac{27}{16}c^4, \quad h^4 = \tfrac{27}{16}c^4, \quad h^4 > \tfrac{27}{16}c^4$$

unterschieden werden. Im ersten Falle zeigen die Werthe von $\varphi(0)$, $\varphi(\frac{1}{2}c)$ und $\varphi(c)$, dass der obere Curvenzweig zwei Culminationspunkte besitzt, von denen der obere zwischen 0 und $\frac{1}{2}c$, der untere zwischen $\frac{1}{2}c$ und c liegt. Im zweiten Unterfalle wird

$$y\frac{dy}{dx} = \frac{(c-2x)^2[2c^2+(5c-2x)^2]}{16(2c-x)^3},$$

und dann ziehen sich die beiden vorigen Culminationspunkte zu einem Punkte zusammen, in welchem zwar die Tangente horizontal liegt, der aber kein Culminationspunkt ist, weil der Differentialquotient sein Zeichen nicht wechselt. Im letzten Falle sind gar keine Culminationspunkte vorhanden.

Weiter erhält man

$$y^3\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2h^8}{(2c-x)^6} - \frac{3h^4x^2}{(2c-x)^4} + \frac{2h^4x}{(2c-x)^3} - \frac{h^4}{(2c-x)^2}$$

$$= -2h^4\frac{8c^4 - h^4 - 24c^3x + 30c^2x^2 - 16cx^3 + 3x^4}{(2c-x)^6}$$

oder unter Benutzung der früheren Zeichen

$$y^3\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2c^2\xi^2}{m^2}(\xi^4 - 6m\xi^2 + 8m\xi - 3m).$$

Die Gleichung

$$\xi^4 - 6m\xi^2 + 8m\xi - 3m = 0$$

besitzt jederzeit zwei imaginäre Wurzeln, es kann daher die obere Hälfte der Curve höchstens zwei Inflexionspunkte haben. Ist nun erstens $h < c$, so liegt der eine Inflexionspunkt zwischen a_3 und $2c$, der andere zwischen $2c$ und a_4. Im Falle $h = c$ wird einfacher

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -2h^4 \frac{7c - 3x}{(2c - x)^3 \sqrt{(c^2 + 2cx - x^2)^3}},$$

und es existirt dann im oberen Zweige der Curve nur ein Inflexionspunkt an der Stelle

$$x = \tfrac{7}{3}c, \quad y = \frac{4\sqrt{2}}{3}c;$$

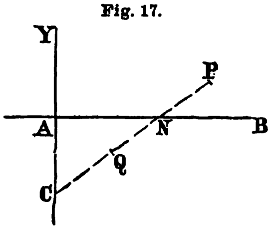
legt man im Punkte $x = c$, $y = 0$ eine Tangente an die Curve, so geht diese Tangente durch den Inflexionspunkt. Im letzten Falle $h > c$ liegt ein Wendepunkt zwischen 0 und $2c$, der andere zwischen $2c$ und a_4.

Zur Normalconstruction eignet sich am besten die Formel

$$x + y\frac{dy}{dx} = \frac{r^2}{2c - x}.$$

20. Die Conchoide. Eine Gerade AB und ein um die Strecke $AC = b$ davon entfernter Punkt C sind gegeben (Fig. 17); man verbindet den letzteren mit beliebigen Punkten N der Geraden und schneidet von N aus auf beiden Seiten von NC die gleichen Strecken $NP = NQ = a$ ab. Die so entstehende Curve besitzt zwei Zweige; für den oberen ist, wenn $\angle ACN = \omega$ gesetzt wird,

Fig. 17.



$$x = b\tan\omega + a\sin\omega, \quad y = +a\cos\omega,$$

für den unteren

$$x = b\tan\omega - a\sin\omega, \quad y = -a\cos\omega,$$

woraus für beide Zweige die gemeinsame Curvengleichung folgt

$$x^2y^2 = (b + y)^2(a^2 - y^2).$$

Hiernach ergeben sich die Differentialquotienten

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{xy^3}{(y + b)(y^3 + a^2b)},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{a^2y^3(y^3 + 3by^2 - 2a^2b)}{(y^3 + a^2b)^3}.$$

Die Punkte $x = 0$, $y = +a$ und $x = 0$, $y = -a$ sind die Culminationspunkte der Curve; die Abscissenachse ist Asymptote derselben. Die cubische Gleichung

$$y^3 + 3by^2 - 2a^2b = 0$$

bestimmt die Ordinaten der Inflexionspunkte, wobei zu beachten ist, dass diese Punkte nur dann existiren, wenn die Wurzeln der vorstehenden Gleichung reell und zugleich zwischen $-a$ und $+a$ enthalten sind. Für $b > a$ findet man zwei derartige y, für $b \overline{\overline{<}} a$ nur eines; demnach besitzt die Curve vier Inflexionspunkte, wenn $b > a$ ist; ausserdem nur zwei. Für $b = a$ entsteht bei C eine Spitze, für $b < a$ hat die Curve eine um C herumgehende Schlinge.

§ 16.

Fortsetzung. (Transcendente Curven.)

1. Die logarithmische Linie hat zur Gleichung

$$y = be^{\frac{x}{a}} \quad \text{oder} \quad x = al\left(\frac{y}{b}\right);$$

drei oder mehreren in arithmetischer Progression stehenden Abscissen entsprechen hiernach Ordinaten, welche eine geometrische Progression bilden, und zufolge dieser Eigenschaft können aus dem Coordinatenpaar $x = 0$, $y = b$, $x = a$, $y = be$ beliebig viele weitere Coordinaten durch Construction abgeleitet werden. Die Curve steigt fortwährend mit convexer Krümmung; die Subtangente ist constant $= a$, der Krümmungsradius

$$\varrho = \frac{\sqrt{(a^2 + y^2)^3}}{ay}.$$

2. Die Gewölblinie entsteht, wenn man die beiden symmetrisch entgegengesetzt liegenden logarithmischen Linien

$$y_1 = be^{+\frac{x}{a}}, \quad y_2 = be^{-\frac{x}{a}}$$

construirt und zwischen jedem y_1 und y_2 das arithmetische Mittel aufsucht; die Gleichung der Gewölblinie lautet demnach

$$y = \tfrac{1}{2}b\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

oder auch

$$x = al\left(\frac{y + \sqrt{y^2 - b^2}}{b}\right).$$

Die Curve wird von der y-Achse in zwei congruente Theile getheilt, von welchen der über der positiven x-Achse liegende Zweig fortwährend mit convexer Krümmung steigt. Mittelst der Formel

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{y^2 - b^2}}{a}$$

ist die Tangente im Punkte xy leicht zu construiren; für den Krümmungshalbmesser hat man

$$\varrho = \frac{\sqrt{(a^2 - b^2 + y^2)^3}}{ay}.$$

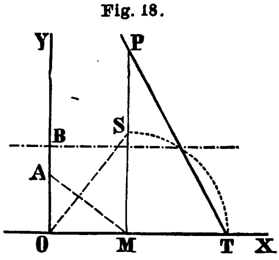
Im speciellen Falle $b = a$ führt die Curve den Namen Kettenlinie; der Krümmungsradius ist dann gleich und entgegengesetzt der Normale.

3. Die reciproke logarithmische Linie hat zur Gleichung

$$y = be^{\frac{a}{x}} \quad \text{oder} \quad x = \frac{a}{l\left(\frac{y}{b}\right)};$$

drei in harmonischer Proportion stehende Abscissen entsprechen hiernach drei in geometrischer Proportion stehenden Ordinaten, und zufolge dieser Eigenschaft können aus einem Coordinatenpaar (z. B. $x = \frac{1}{2}a$, $y = be^2$ und $x = a$, $y = be$) beliebig viele Coordinatenpaare durch Construction hergeleitet werden. Den negativen Abscissen von $x = -\infty$ bis $x = 0$ entspricht ein Curvenzweig, der von einer in der Höhe b parallel zur x-Achse liegenden Asymptote bis zum Coordinatenanfange herabsteigt und an der Stelle $x = -\frac{a}{2}$, $y = \frac{b}{e^2}$ von concaver zu convexer Krümmung übergeht. An der Stelle $x = 0$ springt y von 0 nach $+\infty$ über, nachher fällt die Curve mit convexer Krümmung und nähert sich derselben Asymptote, wie der vorige Zweig. Um die Tangente im Punkte P zu construiren (Fig. 18), nehme man auf der Ordinatenachse $OA = a$, lege durch O senkrecht zu AM eine Gerade, welche die Ordinate MP in S schneidet, so ist $MS = MT$ die Subtangente.

Fig. 18.



Der Krümmungsradius ist

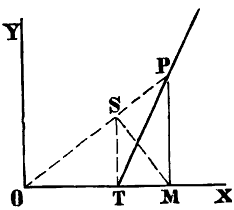
$$\varrho = \frac{\sqrt{(x^4 + a^2y^2)^3}}{a(a + 2x)x^2y}.$$

4. Die Gleichung einer Curve sei

$$y^2 = x^2 l\left(\frac{x^2}{a^2}\right),$$

wobei man beachten möge, dass die Functionen $l(z^2)$ und $2lz$ zwar für positive, nicht aber für negative z identisch sind. Der Coordinatenanfang ist der Mittelpunkt der Curve, welche aus vier congruenten Quadranten besteht. Betrachtet man nur den zwischen den positiven Seiten der Coordinatenachsen liegenden Quadranten, so findet sich, dass derselbe mit $x = a$, $y = 0$ beginnt, anfangs mit concaver Krümmung, von $x = y = a\sqrt{e}$ ab mit convexer Krümmung steigt und ins Unendliche geht. Um die Tangente in einem Curvenpunkte P zu construiren (Fig. 19), fällt man vom Abscissenendpunkte M eine Senkrechte MS auf den Radiusvector OP und legt noch $ST \perp OX$; es ist dann MT die Subtangente. Für den Krümmungsradius ergiebt sich, wenn u die Normale im Punkte P bezeichnet,

Fig. 19.



$$\varrho = \frac{u^3}{y^2 - x^2};$$

hieraus folgt eine einfache Construction des Krümmungsmittelpunktes.

5. Die logarithmische Lemniscate. Es sei

$$y^2 = x^2 l\left(\frac{a^2}{x^2}\right),$$

so besteht die Curve aus vier congruenten um den Coordinatenanfang herum liegenden Quadranten. Der zwischen positiven Coordinatenachsen befindliche Quadrant geht vom Coordinatenanfange aus*, steigt mit concaver Krümmung bis zu dem oberen Culmi-

* Man kann hierbei folgende Bemerkung zu Hülfe nehmen. Für $a < b$ ist bekanntlich (S. 3)

$$\frac{b^m - a^m}{b - a} > m a^{m-1},$$

mithin für $a = 1$, $b = 1 + \frac{z}{m}$,

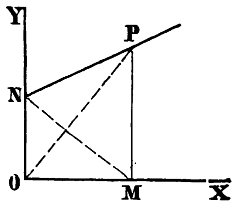
$$\left(1 + \frac{z}{m}\right)^m - 1 > z$$

und durch Uebergang zur Grenze für unendlich wachsende m

$$e^z - 1 > z \text{ folglich } e^z > z.$$

nationspunkte $x = y = \frac{a}{\sqrt{e}}$, fällt dann bis $x = a$, $y = 0$ und wird für $x > a$ imaginär; in beiden Durchschnitten mit der x-Achse steht die Curve senkrecht auf dieser Achse. Der Mittelpunkt ist der einzige Wendepunkt. Um die Tangente im Punkte P zu construiren, legt man durch den Abscissenendpunkt M senkrecht zum Radiusvector OP (Fig. 20) eine Gerade MN, welche die Ordinatenachse in N schneidet; NP ist dann die Tangente.

Fig. 20.



Bezeichnet u die Normale im Punkte P, so ergiebt sich

$$\varrho = \frac{u^3}{x^2 + y^2},$$

woraus eine einfache Krümmung des Krümmungsmittelpunktes folgt.

6. Die Tractorie der Geraden. Durch die beiden Gleichungen

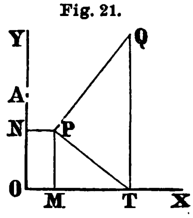
$$x = a\left(\tfrac{1}{2} l \cot^2 \tfrac{1}{2}\omega - \cos\omega\right), \quad y = a \sin\omega$$

oder durch die eine Gleichung

$$x = \tfrac{1}{2} a l \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{a - \sqrt{a^2 - y^2}}\right) - \sqrt{a^2 - y^2}$$

wird eine Curve von folgenden Eigenschaften bestimmt. Die Curve besteht aus vier congruenten um den Coordinatenanfang herum liegenden Quadranten. Der zwischen den positiven Seiten der Coordinatenachsen enthaltene Quadrant beginnt mit $x = 0$, $y = a$, fällt unausgesetzt mit convexer Krümmung und hat die x-Achse zur Asymptote. Es ist ferner

Fig. 21.



$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}$$

und hieraus folgt, dass die Tangente PT (Fig. 21) die constante Länge a besitzt. Für den Krümmungshalbmesser findet man

---

Setzt man $z = \frac{1}{2} l\omega$, wo ω mehr als die Einheit betragen muss, und quadrirt, so erhält man

$$\omega > \tfrac{1}{4}(l\omega)^2$$

oder

$$\frac{l\omega}{\omega} < \frac{4}{l\omega},$$

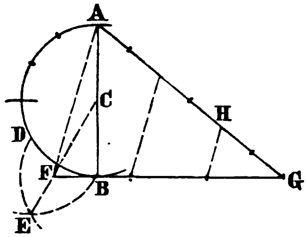
daraus geht hervor, dass $\frac{l\omega}{\omega}$ bei unendlich wachsenden ω gegen die Null convergirt.

$$\varrho = \frac{a\sqrt{a^2 - y^2}}{y};$$

errichtet man in T eine Senkrechte auf der x-Achse, so schneidet diese Senkrechte die Normale im Krümmungsmittelpunkte Q.

7. **Die Spirale des Archimedes** ist diejenige Curve, bei welcher der Radiusvector r proportional dem Polarwinkel θ wächst.

Fig. 22.

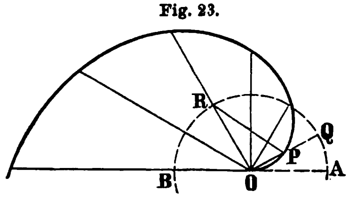


Um diese Spirale zu construiren, muss man zunächst ihren erzeugenden Kreis rectificiren, was entweder mittelst eines Massstabes, oder auf folgendem graphischen Wege geschehen kann (Fig. 22). Ist $AB = 2a$ der Durchmesser, C der Mittelpunkt des Kreises, so legt man in B eine Tangente an den Kreis, construirt mit ungeänderter Zirkelöffnung den Winkel $BCE = 30^0$, die Gerade $BF = a \cdot tan\, 30^0$ und nimmt $FG = 3a$; es ist dann

$$AG = a\sqrt{13\tfrac{1}{3} - \sqrt{12}} = a \cdot 3{,}141533 \cdots,$$

also mit einer für graphische Zwecke völlig ausreichenden Genauigkeit $AG = a \cdot \pi =$ dem Halbkreise ADB. Theilt man sowohl den Halbkreis als die Gerade in gleichviel gleiche Theile, z. B. in 6, oder 12, oder 24 Theile, was aus nahe liegenden Gründen sehr bequem ist, so entstehen beiderseits gleiche Stücke, wie z. B. $arc\, BD = GH$.

Fig. 23.



In Fig. 23 sei nun wieder $OA = a$ und die Peripherie des um O mit dem Radius a beschriebenen Kreises eben so wie vorhin getheilt; nach den Theilpunkten zieht man die Radien und trägt auf letztere, vom Mittelpunkte O aus, die entsprechenden geradlinigen Strecken auf, so dass immer $OP = arc\, AQ$ ist. Die Gleichung der Spirale ist hiernach

$$r = a\theta \text{ oder } \frac{y}{x} = tan \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{a}.$$

Vom Coordinatenanfange ausgehend, macht die Spirale unendlich viele, sich mehr und mehr erweiternde Windungen; sie besitzt daher unendlich viele Culminationspunkte, deren Polarwinkel durch die Wurzeln der transcendenten Gleichung

$$\tan\theta = -\theta$$

bestimmt werden. Die Polarsubnormale hat die constante Grösse a; legt man demnach senkrecht zum Vector OP den Kreisradius OR, so ist PR die Normale für den Punkt P. Der Krümmungshalbmesser ist

$$\varrho = \frac{u^3}{a^2 + u^2},$$

worin u die Polarnormale PR bezeichnet.

8. Die hyperbolische Spirale. Diese Curve hat zur Gleichung

$$r = \frac{a}{\theta},$$

und lässt sich auf ähnliche Weise wie die Spirale des Archimedes construiren. Für $\theta = 0$ wird $r = \infty$ und zugleich geht $y = r\sin\theta$ in a über; bei wachsenden θ nimmt r ab. Die hyperbolische Spirale besitzt demnach eine Asymptote, welche in der Entfernung a parallel zur Polarachse liegt; sie macht ferner unendlich viele, sich mehr und mehr verengende Windungen; der Coordinatenanfang ist ein asymptotischer Punkt der Curve. Culminationspunkte sind, wie bei der vorigen Curve, an den Stellen vorhanden, wo $\tan\theta = -\theta$ wird. Die Polarsubtangente hat den constanten Werth $-a$, was eine einfache Tangentenconstruction giebt. Bezeichnet u die Polarnormale, so ist

$$\varrho = \frac{u^3}{r^2}.$$

9. Die parabolische Spirale hat zur Gleichung

$$r^2 = a^2\theta$$

und kann wegen $r = \sqrt{a \cdot a\theta}$ auf ähnliche Weise wie die Spirale des Archimedes construirt werden. Sie macht vom Coordinatenanfang aus sowohl nach rechts wie nach links unendlich viele sich erweiternde Windungen, deren Culminationspunkte durch die transcendente Gleichung

$$\tan\theta = -2\theta$$

bestimmt werden. Die Polarsubnormale ist nach der Formel

$$r' = \frac{a^2}{2r}$$

leicht zu construiren; zwischen der Polarnormale u und dem Krümmungsradius besteht die Relation

$$\varrho = \frac{u^3}{3u^2 - 2r^2}.$$

10. Die reciproke parabolische Spirale (Lituus). Als Gleichung der Curve hat man

$$r^2 = \frac{a^2}{\theta},$$

welcher Ausdruck leicht zu construiren ist. Für $\theta = 0$ wird $r = \infty$, dagegen $y = 0$; bei wachsenden θ nimmt r ab. Die Curve macht daher, und zwar nach entgegengesetzten Seiten hin, unendlich viele sich verengernde Windungen; die Polarachse ist ihre Asymptote, der Pol ihr asymptotischer Punkt. Culminationspunkte sind an den Stellen vorhanden, wo $\tan\theta = -2\theta$ wird. Ferner besitzt die Curve zwei Inflexionspunkte für $\theta = \frac{1}{2} = arc\, 28^0\, 38'\, 52''\, 4$ und $r = \pm\sqrt{2}\cdot a$. Die Polarsubtangente bestimmt sich durch die leicht construirbare Formel

$$\frac{r^2}{r'} = -2\frac{a^2}{r};$$

zwischen der Polarnormale u und dem Krümmungsradius besteht die Relation

$$\varrho = \frac{4a^4u^3}{r^2(4a^4 - r^4)}.$$

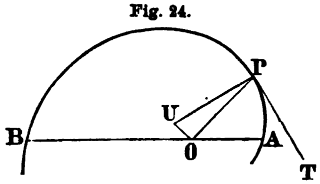
11. Die logarithmische Spirale. Aus der Gleichung der Curve nämlich

$$r = ae^{\beta\theta} \text{ oder } \theta = \frac{1}{\beta}l\left(\frac{r}{a}\right)$$

folgt, dass die Vectoren in geometrischer Progression wachsen, wenn die Polarwinkel eine arithmetische Progression bilden; sind demnach zwei Punkte der Curve bekannt, z. B. A mit den Coordinaten $\theta = 0$, $r = a$ und B mit den Coordinaten $\theta = \pi$, $r = b$, so lassen sich durch Construction beliebig viele Curvenpunkte bestimmen. Den von 0 bis $+\infty$ wachsenden θ entsprechen unendlich viele, sich fortwährend erweiternde Windungen, den Werthen von $\theta = 0$ bis $\theta = -\infty$ unendlich viele immer enger werdende Windungen, die sich dem Coordinatenanfange als asymptotischem

Punkte nähern. So oft $cot\,\theta = -\beta$ wird, treten Culminationspunkte ein. Der Winkel OPT zwischen Radiusvector und Tangente (Fig. 24) hat immer dieselbe Grösse, nämlich $arc\,cot\beta$; der Krümmungshalbmesser ist gleich der Polarnormale PU.

Fig. 24.



12. Die Kreisevolvente (Fig. 25). An einen, mit dem Radius $OA = a$ beschriebenen Kreis ist in einem beliebigen Punkte M eine Tangente gelegt und auf derselben eine Strecke MP abgeschnitten, welche gleich ist dem Kreisbogen zwischen M und einem festen Punkte A; alle so construirten Punkte P bilden eine Curve, welche sich für $\angle AOM = \omega$ folgendermassen ausdrücken lässt

$$x = a(\cos\omega + \omega\sin\omega),$$
$$y = a(\sin\omega - \omega\cos\omega)$$

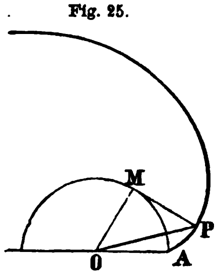
oder

$$r = a\sqrt{1+\omega^2}, \quad \theta = \omega - arc\tan\omega,$$

oder

$$\theta = \frac{\sqrt{r^2-a^2}}{a} - Arc\cos\frac{a}{r}.$$

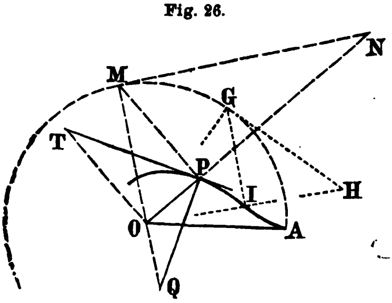
Fig. 25.



Die Curve gehört zu den Spiralen, insofern sie unendlich viele, sich fortwährend erweiternde Windungen um O herum macht. Die Kreistangente MP ist zugleich die Normale und der Krümmungshalbmesser der Curve. Nimmt man in den vorigen Formeln die Wurzeln negativ, so erhält man den zweiten Zweig der Curve, welcher dem ersten symmetrisch entgegengesetzt liegt.

13. Die Tractorie des Kreises (Fig. 26). Es sei A ein fester, M ein beliebiger Punkt eines mit dem Radius $OA = a$ beschriebenen Kreises; durch M ist eine Tangente an den Kreis gelegt, auf dieser $MN = arc\,AM$ genommen und schliesslich auf ON die Senkrechte MP gefällt; alle so construirten Punkte P bilden eine Curve, welche sich für $\angle AOM = \omega$ folgendermassen ausdrücken lässt

Fig. 26.



$$r = \frac{a}{\sqrt{1+\omega^2}}, \quad \theta = \omega - arc\tan\omega$$

oder

$$\theta = \frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{r} - Arc\cos\frac{r}{a}.$$

Die Curve macht von A aus unendlich viele, sich fortwährend verengernde Windungen um den Coordinatenanfang, welcher der asymptotische Punkt der Curve ist; sie besitzt ferner einen Inflexionspunkt I an der Stelle

$$\omega = 1, \quad r = \frac{a}{\sqrt{2}}, \quad \theta = 1 - \frac{\pi}{4},$$

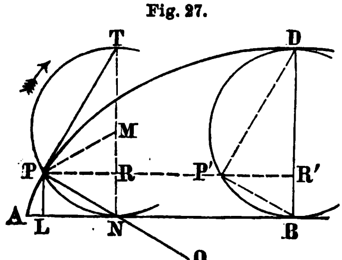
welchen man leicht mittelst der Bemerkung construiren kann, dass näherungsweise

$$\tan 1 = \tan 57' \, 17' \, 44'' \, 8 = \tfrac{95}{61}$$

ist, wobei der begangene Fehler weniger als 2 Secunden beträgt. Die Polartangente PT hat die constante Länge a; der Durchschnitt von MO mit der Normale ist der Krümmungsmittelpunkt Q. Nimmt man in den obigen Formeln die Wurzelgrössen negativ, so erhält man einen zweiten Curvenzweig, welcher dem ersten symmetrisch entgegengesetzt liegt.

14. Die Cycloide (Fig. 27). Wenn ein Kreis auf einer Geraden fortrollt, ohne zu gleiten, so beschreibt ein Peripheriepunkt des Kreises die genannte Curve. Es sei AB die gegebene Gerade, NPT der rollende Kreis in einer seiner Lagen, wo er AB in N berührt, P derjenige Punkt des Kreises, welcher die Curve beschreibt und welcher sich zu Anfange der Bewegung in A befunden haben möge; es ist dann $AN = arc\,NP$.

Fig. 27.



Um die Curve zu construiren, braucht man den Kreis nur in seiner mittelsten, einer halben Umdrehung entsprechenden Lage zu zeichnen, so dass AB gleich der halben Kreisperipherie $BP'D$ ist; man wählt dann $arc\,BP'$ willkürlich, nimmt $AN = arc\,BP'$, zieht durch P' eine Parallele, durch N eine Senkrechte zu AB und trägt von dem Durchschnitte R beider Linien die Strecke $RP = R'P'$ ab. Nimmt man A zum Anfang rechtwinkliger

Coordinaten, AB zur Abscissenachse, setzt den Kreisradius $MP = b$ und den sogenannten Wälzungswinkel $PMN = \omega$, so erhält man

$$x = b(\omega - \sin\omega), \quad y = b(1 - \cos\omega)$$

oder

$$x = b\,\mathrm{Arc}\cos\frac{b-y}{b} - \sqrt{2by - y^2},$$

wobei überhaupt $\mathrm{Arc}\cos z$ irgend einen der Bögen bezeichnet, welche z zum Cosinus haben. Aus diesen Gleichungen ergeben sich die Werthe

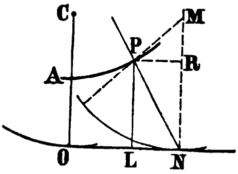
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin\omega}{1-\cos\omega} = \cot\tfrac{1}{2}\omega,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{b(1-\cos\omega)^2} = -\frac{1}{4b\sin^4\frac{1}{2}\omega}.$$

Die Curve besteht aus unendlich vielen congruenten Zügen, welche die Abscissenachse in den Punkten $x = 0$, $\pm 2\pi b$, $\pm 4\pi b$, $\pm 6\pi b$, etc. rechtwinklig schneiden und an den Punkten $x = \pm \pi b$, $\pm 3\pi b$, $\pm 5\pi b$, etc., denen immer dieselbe Ordinate $2b$ entspricht, obere Culminationspunkte besitzen; Inflexionspunkte sind nicht vorhanden. Zieht man noch den Durchmesser NMT, so ist PT die Tangente, PN die Normale der Curve; der Krümmungsradius PQ beträgt das Doppelte der Normale PN.

15. Die gedehnte und die verschlungene Cycloide (Fig. 28). Wie bei der vorigen Aufgabe denke man sich einen Kreis auf einer Geraden rollend, nehme aber als beschreibenden Punkt einen nicht auf der Kreisperipherie liegenden Punkt, dessen Abstand vom Kreismittelpunkt $= c$ sein möge. Die Anfangslage des Kreises sei diejenige, bei welcher die Verbindungslinie des Kreismittelpunktes und des beschreibenden Punktes A senkrecht auf der gegebenen Geraden steht und der Abstand des beschreibenden Punktes von dieser Geraden am kleinsten ist; die Basis nehmen wie zur Abscissenachse, ihren Durchschnitt mit CA zum Coordinatenanfang. Es gelten dann folgende Gleichungen

Fig. 28.



$$x = b\omega - c\sin\omega, \quad y = b - c\cos\omega,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{c\sin\omega}{b - c\cos\omega}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{c(b\cos\omega - c)}{(b - c\cos\omega)^3},$$

bei deren Discussion zwei Fälle unterschieden werden müssen.

Ist nämlich $c < b$ wie in Fig. 28, so heisst die Curve eine **gedehnte** Cycloide. Dieselbe schneidet die Abscissenachse nicht und besitzt an den Stellen $x = 0, \pm \pi b, \pm 2\pi b, \pm 3\pi b$, etc. Culminationspunkte, welche abwechselnd untere und obere Culminationspunkte sind; dazwischen liegen Inflexionspunkte, deren ω durch die Gleichung $\cos\omega = \frac{b}{c}$ bestimmt werden, deren Abscissen mithin sind

$$x_i = b \, Arc\cos\frac{c}{b} - \frac{c\sqrt{b^2 - c^2}}{b}.$$

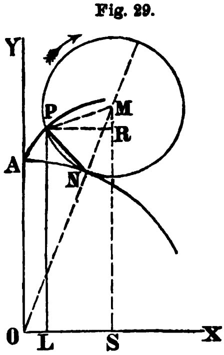
Im Falle $c > b$ heisst die Curve eine **verschlungene** Cycloide. Sie schneidet die Abscissenachse unendlich vielmal an den Stellen, wo $\cos\omega = \frac{b}{c}$ wird; sie besitzt ferner untere und obere Culminationspunkte an denselben Stellen, wie die gedehnte Cycloide, dagegen sind Inflexionspunkte im eigentlichen Sinne nicht vorhanden. Für beide Cycloiden ist PN die Normale; bezeichnet man sie mit u, so hat man für den Krümmungshalbmesser die Formel

$$\varrho = \frac{u^3}{c(b\cos\omega - c)},$$

welche leicht geometrisch construirt werden kann.

16. Die **Epicycloiden.** Auf der Aussenseite eines unbeweglichen, mit dem Radius $OA = a$ beschriebenen Kreises (Fig. 29) rolle ein mit dem Halbmesser b construirter Kreis; irgend ein Peripheriepunkt P des letzteren Kreises beschreibt dann eine Epicycloide. Den Anfang der Bewegung denken wir uns so, dass der beschreibende Punkt mit dem Berührungspunkte A beider Kreise zusammenfällt; nennen wir für irgend eine spätere Lage N den Berührungspunkt beider Kreise, so ist immer $arc\,AN = arc\,NP$. Die Construction der Curve kommt daher in der Hauptsache darauf zurück, derartige gleiche Bögen zu finden.

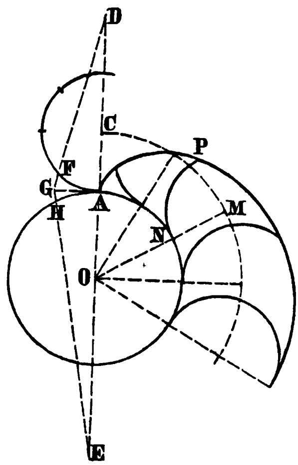
Fig. 29.



Wenn die beiden Kreishalbmesser in rationalem Verhältnisse stehen, so erreicht man dies leicht dadurch, dass man zwei ganze Zahlen m und n wählt, die sich wie a zu b verhalten und nachher den ruhenden Kreis in m-, den beweglichen Kreis in

n-Theile theilt. So ist in Fig. 30 $a:b = 3:2$, $m = 12$, $n = 8$, mithin $arc\,AH$, d. h. $\frac{1}{12}$ der Peripherie des ersten Kreises, $= arc\,AF = \frac{1}{8}$ der Peripherie des zweiten, ebenso $arc\,AN = 2 \cdot arc\,AH = 2\,arc\,AF = arc\,NP$. Bei einem irrationalen Verhältniss von $a:b$ ist es für graphische Zwecke hinreichend, statt jenes Verhältnisses ein nahekommendes rationales Verhältniss zu setzen, welches man durch Abkürzung des unendlichen Decimalbruches für $\frac{a}{b}$ oder besser durch Kettenbrüche erhält; so würde man im Falle $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$ entweder $m = 14$, $n = 10$, oder genauer $m = 17$, $n = 12$ nehmen. Ein anderes Näherungsverfahren ist folgendes. Auf dem kleineren der beiden Kreise, welcher

Fig. 30.



in Fig. 30 der rollende Kreis ist, nehme man den Bogen AF willkürlich, jedoch höchstens gleich einem Achtel der Peripherie, ferner AD gleich dem dreifachen Radius AC und ziehe DF, welche Gerade die durch A gelegte Kreistangente in G schneidet; die Strecke AG kommt dann dem Bogen AF sehr nahe und lässt sich nun wieder auf den anderen Kreis übertragen, indem man $AE = 3 \cdot AO$ nimmt und die Gerade EG zieht, welche von dem zweiten Kreise den Bogen $AH = AG = AF$ abschneidet.* Hat man nach der einen oder andern Methode die gleichen Bögen AH und AF construirt, so nimmt man auf der Peripherie des ruhenden Kreises $arc\,AN$ gleich einem beliebigen Vielfachen von $arc\,AH$, zieht $ONM = a + b$, beschreibt aus M mit dem Radius b einen Kreisbogen NP, welcher das Gleichvielfache von $arc\,AF$ ist; man kann auf diese Weise beliebig viele Curvenpunkte P construiren.

Wählt man O zum Anfang rechtwinkliger Coordinaten, OA zur Ordinatenachse und setzt den Wälzungswinkel $NMP = \omega$, so führt die Bemerkung, dass in Fig. 29 $\angle AON = \frac{b\omega}{a}$ und $\angle PMR = \omega + \frac{b\omega}{a}$ ist, zu folgenden Gleichungen

* Vergl. die Aufgabe Nr. 10 in § 41.

$$x = (a+b)\sin\frac{b\omega}{a} - b\sin\frac{(a+b)\omega}{a},$$

$$y = (a+b)\cos\frac{b\omega}{a} - b\cos\frac{(a+b)\omega}{a}.$$

In dem besonderen Falle, wo $\frac{b}{a}$ ein rationaler Bruch ist, wo sich also b und a zu einander verhalten wie die ganzen positiven Zahlen n und m, kann ω aus den vorstehenden Gleichungen eliminirt werden. Für $\omega = m\varphi$ ist nämlich

$$x = (a+b)\sin n\varphi - b\sin(m+n)\varphi,$$
$$y = (a+b)\cos n\varphi - b\cos(m+n)\varphi,$$

und hier lassen sich die Sinus und Cosinus der Winkel $n\varphi$ und $(m+n)\varphi$ durch Potenzen der Sinus und Cosinus des einfachen Winkels φ ausdrücken; die Elimination von $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ hat nachher keine Schwierigkeit.

Ist z. B. $b = \frac{1}{2}a$ und wird $\omega = 2\varphi$ gesetzt, so hat man

$$x = \tfrac{1}{2}a(3\sin\varphi - \sin 3\varphi) = 2a\sin^3\varphi,$$
$$y = \tfrac{1}{2}a(3\cos\varphi - \cos 3\varphi) = a(2\sin^2\varphi + 1)\cos\varphi,$$

mithin durch Elimination von φ

$$(x^2 + y^2 - a^2)^3 = \tfrac{27}{4}a^4x^2,$$

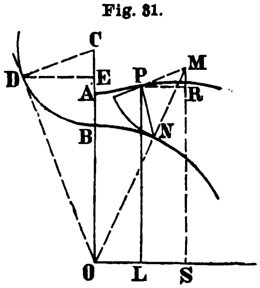
woraus hervorgeht, dass die auf Seite 99 unter Nr. 14 betrachtete Curve eine Epicycloide ist.

In dem noch einfacheren Falle $b = a$ erhält man durch Elimination von a und mittelst der Coordinatenveränderung $x = x_1$, $y = a - y_1$

$$(x_1^2 + y_1^2 - 2ax_1)^2 = 4a^2(x_1^2 + y_1^2),$$

woraus folgt, dass auch die Cardioide als eine Epicycloide betrachtet werden kann.

Fig. 31.



Um die Gleichungen der gedehnten und der verschlungenen Epicycloide zu finden, nehme man die Entfernung des beschreibenden Punktes P vom Mittelpunkte M des rollenden Kreises nicht $= b$, sondern $= c$; man erhält dann (Fig. 31)

$$x = (a+b)\sin\frac{b\omega}{a} - c\sin\frac{(a+b)\omega}{a},$$

$$y = (a+b)\cos\frac{b\omega}{a} - c\cos\frac{(a+b)\omega}{a},$$

wobei $c < b$ einer gedehnten, $c > b$ einer verschlungenen Epicycloide entspricht. Hinsichtlich der Elimination von ω gilt hier wieder die vorige Bemerkung.

Durch Differentiation der obigen Formeln ergeben sich die Werthe

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b \sin\frac{b\omega}{a} - c \sin\frac{(a+b)\omega}{a}}{b\cos\frac{b\omega}{a} - c\cos\frac{(a+b)\omega}{a}} = \frac{a\sin\frac{b\omega}{a} - x}{y - a\cos\frac{b\omega}{a}},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^3 + (a+b)c^2 - (a+2b)bc\cos\omega}{(a+b)\left(b\cos\frac{b\omega}{a} - c\cos\frac{(a+b)\omega}{a}\right)^3},$$

$$\varrho = \frac{(a+b)\sqrt{(b^2 - 2bc\cos\omega + c^2)^3}}{b(b^2 - 2bc\cos\omega + c^2) + ac(c - b\cos\omega)}.$$

Die Entfernung $OP = r$ wird am kleinsten für $\omega = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \pm 6\pi$ etc., am grössten für $\omega = \pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi$ etc.; die Normale im Punkte P geht immer durch den entsprechenden Berührungspunkt N beider Kreise. Ein Zeichenwechsel von ϱ tritt ein für

$$\cos\omega = \frac{b^3 + (a+b)c^2}{(a+2b)bc}$$

oder

$$\tan\tfrac{1}{2}\omega = \sqrt{\frac{b-c}{b+c}\cdot\frac{(a+b)c - b^2}{(a+b)c + b^2}},$$

wozu entweder

$$b > c > \frac{b^2}{a+b}$$

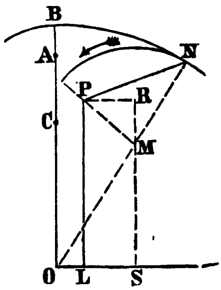
oder

$$b < c < \frac{b^2}{a+b}$$

nothwendig ist. Da die letzte Ungleichung sich selber widerspricht, so können Zeichenwechsel von ϱ, d. h. Inflexionspunkte, bei der verschlungenen Epicycloide gar nicht, und bei der gedehnten Epicycloide nur dann vorkommen, wenn c zwischen $\frac{b^2}{a+b}$ und b enthalten ist. Die geometrische Bedeutung hiervon ergiebt sich, wenn man von O aus an den in seiner Anfangslage befindlichen rollenden Kreis die Tangente OD legt und von D auf OC die Senkrechte DE fällt; der beschreibende Punkt, dessen Anfangslage A ist, muss dann zwischen E und B liegen. Aus dem Werthe von ϱ kann man leicht eine Construction des Krümmungshalbmessers ableiten.

17. Die Hypocycloiden (Fig. 32). Auf der Innenseite eines festen mit dem Halbmesser a beschriebenen Kreises rolle ein beweglicher Kreis mit dem Radius b; irgend ein Peripheriepunkt des letzteren Kreises beschreibt dann eine Hypocycloide. Liegt der beschreibende Punkt nicht in der Entfernung b, sondern in der Entfernung c vom Mittelpunkte des beweglichen Kreises, so entsteht eine gedehnte oder verschlungene Hypocycloide, je nachdem $c < b$ oder $c > b$ ist. Aus der Figur erhält man leicht für $\angle NMP = \omega$

Fig. 32.



$$x = (a - b) \sin \frac{b\omega}{a} - c \sin \frac{(a - b)\omega}{a},$$

$$y = (a - b) \cos \frac{b\omega}{a} + c \cos \frac{(a - b)\omega}{a};$$

dieselben Gleichungen entstehen auch, wenn man in den für die Epicycloiden geltenden Formeln dem b die entgegengesetzte Lage und dem ω die entgegengesetzte Drehungsrichtung giebt, also b, c und ω zugleich negativ nimmt.

Auch hier gilt die Bemerkung, dass die Elimination von ω ausgeführt werden kann, sobald $\frac{b}{a}$ ein rationaler Bruch ist. So hat man z. B. für $c = b = \frac{3}{4}a$ und $\omega = 4\varphi$

$$x = \tfrac{1}{4}a(\sin 3\varphi - 3 \sin \varphi) = - a \sin^3 \varphi,$$
$$y = \tfrac{1}{4}a(\cos 3\varphi + 3 \cos \varphi) = + a \cos^3 \varphi,$$

und durch Elimination von φ

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},$$

woraus hervorgeht, dass die auf Seite 98 unter Nr. 12 betrachtete Curve zu den Hypocycloiden gehört.

Die Entwickelung der allgemeinen Eigenschaften der Hypocycloiden geschieht nach ganz ähnlichen Formeln wie bei den Epicycloiden.

In dem Falle $a < b$, wo sich der grössere Kreis um den kleineren herumschwingt, nennen Manche die Curve eine Pericycloide; die nicht erheblichen Modificationen, welche die Formeln dann erleiden, wird man ohne Mühe finden.

Capitel V.

Aufgaben über geometrische Orte.

§ 17.

Die Evoluten.

Sind x und y die rechtwinkligen Coordinaten eines Curvenpunktes und ist ferner zur Abkürzung

$$\frac{dy}{dx} = y', \quad \frac{d^2y}{dx^2} = y'',$$

so werden die rechtwinkligen Coordinaten ξ und η des zugehörigen Krümmungsmittelpunktes durch folgende Formeln bestimmt

$$\xi = x - \frac{1 + y'^2}{y''} y', \quad \eta = y + \frac{1 + y'^2}{y''}.$$

Alle Krümmungsmittelpunkte bilden zusammen eine Curve, den geometrischen Ort des Krümmungsmittelpunktes, welche bei ebenen Curven die Evolute der ursprünglichen Curve heisst; ihre Gleichung erhält man aus den Formeln für ξ und η, wenn man, unter Zuhülfenahme der zwischen x und y bestehenden ursprünglichen Curvengleichung, die Variabelen x und y eliminirt, so dass nur die gesuchte Gleichung zwischen ξ und η übrig bleibt.

1. Die Parabel. Aus der Gleichung

$$y = \sqrt{2hx}$$

folgen die Werthe

$$\xi = 3x + h, \quad \eta = -\sqrt{\frac{8x^3}{h}};$$

durch Elimination von x ergiebt sich als Gleichung der Evolute

$$27 h\eta^2 = 8(\xi - h)^3$$

oder, wenn der Coordinatenanfang im Sinne der positiven ξ um h verschoben wird,

$$27 h\eta^2 = 8\xi^3.$$

Die Evolute ist demnach eine semicubische Parabel.

2. Die Ellipse. Stellt man die Ellipsengleichung in der gewöhnlichen Form dar

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

und setzt zur Abkürzung

$$\alpha = \frac{a^2 - b^2}{a}, \quad \beta = \frac{a^2 - b^2}{b},$$

so erhält man als Gleichung der Evolute

$$\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{\eta}{\beta}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$$

oder in rationaler Form

$$\left(\frac{\xi^2}{\alpha^2} + \frac{\eta^2}{\beta^2} - 1\right)^3 + 27\left(\frac{\xi\eta}{\alpha\beta}\right)^2 = 0.$$

3. Die Hyperbel. Aus der Mittelpunktsgleichung

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

folgt, wenn zur Abkürzung

$$\alpha = \frac{a^2 + b^2}{a}, \quad \beta = \frac{a^2 + b^2}{b}$$

gesetzt wird,

$$\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{\eta}{\beta}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$$

oder in rationaler Form

$$\left(\frac{\xi^2}{\alpha^2} - \frac{\eta^2}{\beta^2} - 1\right)^3 - 27\left(\frac{\xi\eta}{\alpha\beta}\right)^2 = 0.$$

4. Die Cissoide. Die Gleichung dieser Curve, nämlich

$$(2a - x)y^2 = x^3$$

liefert die Werthe

$$\xi = -\frac{ax(12a - 5x)}{3(2a - x)^2}, \quad \eta = \frac{8a}{3}\sqrt{\frac{x}{2a - x}};$$

entnimmt man x der zweiten Formel und substituirt den erhaltenen Ausdruck in die erste, so findet man als Gleichung der Evolute

$$4096\,a^3\xi + 1152\,a^2\eta^2 + 27\,\eta^4 = 0.$$

5. Für die Curve, deren Gleichung ist

$$9\,ay^2 = (x - 3a)^2 x,$$

gelten die Werthe

$$\xi = \frac{a^2 + 2ax - x^2}{2a}, \quad \eta = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{x^3}{a}},$$

welche umgekehrt geben

$$x = a \pm \sqrt{2a(a - \xi)}, \quad x = \sqrt[3]{\tfrac{9}{16}a\eta^2}.$$

Beachtet man nun, dass eine Gleichung von der Form

$$a \pm \sqrt{u} = \sqrt[3]{v}$$

nach Wegschaffung der Wurzelgrössen übergeht in

$$(u - a^2)^3 + 2a(3u + a^2)v - v^2 = 0,$$

so erhält man als Gleichung der Evolute

$$256a(a - 2\xi)^3 + 288a(7a - 6\xi)\eta^2 - 81\eta^4 = 0.$$

6. Die Cardioide lässt sich entweder durch die eine der beiden Gleichungen

$$(x^2 + y^2 - 2ax)^2 = 4a^2(x^2 + y^2),$$
$$r = 2a(1 + \cos\theta)$$

oder auch durch die zwei Gleichungen

$$x = 2a(1 + \cos\theta)\cos\theta, \quad y = 2a(1 + \cos\theta)\sin\theta$$

ausdrücken. Die letzteren geben

$$\xi = \tfrac{4}{3}a + \tfrac{2}{3}a(1 - \cos\theta)\cos\theta, \quad \eta = \tfrac{2}{3}a(1 - \cos\theta)\sin\theta,$$

oder, wenn

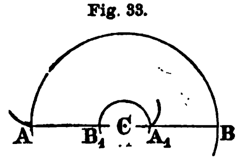
$$\theta = \pi - \theta_1, \quad \tfrac{4}{3}a - \xi = \xi_1, \quad \eta = \eta_1$$

gesetzt wird,

$$\xi_1 = \tfrac{2}{3}a(1 + \cos\theta_1)\cos\theta_1, \quad \eta_1 = \tfrac{2}{3}a(1 + \cos\theta_1)\sin\theta_1.$$

Die Gleichung der Evolute in rechtwinkligen Coordinaten würde man hieraus durch Elimination von θ_1 erhalten, man übersieht aber auch ohne diese Elimination, dass die Evolute der Cardioide wieder eine Cardioide ist. Der Radius ihres erzeugenden Kreises beträgt $\frac{1}{3}a$, ihr Anfangspunkt A_1 liegt in der Entfernung $AA_1 = \frac{4}{3}a$ und die Drehungsrichtung der Evolute ist entgegengesetzt der Drehungsrichtung der gegebenen Cardioide (Fig. 33).

Fig. 33.



7. Die Lemniscate. Drückt man die Gleichung der Curve in Polarcoordinaten aus, nämlich

$$r = a\sqrt{\cos 2\theta},$$

so hat man die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes mittelst folgender Formeln zu bestimmen

$$\xi = r\cos\theta - \frac{(r^2 + r'^2)(r'\sin\theta + r\cos\theta)}{r^2 + 2r'^2 - rr''},$$

$$\eta = r\sin\theta + \frac{(r^2 + r'^2)(r'\cos\theta - r\sin\theta)}{r^2 + 2r'^2 - rr''};$$

man erhält

$$\xi = \frac{2a\cos^3\theta}{3\sqrt{\cos 2\theta}}, \quad \eta = -\frac{2a\sin^3\theta}{3\sqrt{\cos 2\theta}}.$$

Als Gleichung der Evolute ergiebt sich hieraus durch Elimination von θ

$$\left(\xi^{\frac{2}{3}} + \eta^{\frac{2}{3}}\right)^2\left(\xi^{\frac{2}{3}} - \eta^{\frac{2}{3}}\right) = \tfrac{4}{9}a^2.$$

8. Die logarithmische Linie. Von der Gleichung

$$y = be^{\frac{x}{a}}$$

ausgehend erhält man

$$\xi = x - a - \frac{b^2}{a}e^{\frac{2x}{a}}, \quad \eta = 2be^{\frac{x}{a}} + \frac{a^2}{b}e^{-\frac{x}{a}};$$

mittelst der zweiten Gleichung kann man $e^{\frac{x}{a}}$ und x durch η ausdrücken und nach Substitution dieser Werthe wird aus der ersten Gleichung

$$\xi = al\left(\frac{\eta \pm \sqrt{\eta^2 - 8a^2}}{4b}\right) - \frac{\eta(\eta \pm \sqrt{\eta^2 - 8a^2})}{8a} - \tfrac{1}{2}a.$$

9. Die Kettenlinie. Aus der Gleichung

$$y = \tfrac{1}{2}a\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

folgen die Werthe

$$\xi = x - \tfrac{1}{4}a\left(e^{\frac{2x}{a}} - e^{-\frac{2x}{a}}\right), \quad \eta = a\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

welche geben

$$\xi = al\left(\frac{\eta \pm \sqrt{\eta^2 - 4a^2}}{2a}\right) \mp \frac{\eta\sqrt{\eta^2 - 4a^2}}{4a}.$$

10. Die Tractorie der Geraden. Mittelst der Gleichung

$$x = \tfrac{1}{2}al\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{a - \sqrt{a^2 - y^2}}\right) - \sqrt{a^2 - y^2}$$

erhält man die Werthe

$$\xi = \tfrac{1}{2}al\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{a - \sqrt{a^2 - y^2}}\right), \quad \eta = \frac{a^2}{y},$$

mithin durch Elimination von y

$$\xi = \tfrac{1}{2}al\left(\frac{\eta + \sqrt{\eta^2 - a^2}}{\eta - \sqrt{\eta^2 - a^2}}\right) = al\left(\frac{\eta + \sqrt{\eta^2 - a^2}}{a}\right),$$

oder

$$\eta = \tfrac{1}{2}a\left(e^{\frac{\xi}{a}} + e^{-\frac{\xi}{a}}\right);$$

die Evolute ist also die Kettenlinie.

11. Die logarithmische Spirale. Die Gleichung

$$r = ae^{\beta\theta}$$

liefert, wenn ξ und η durch Polarcoordinaten ausgedrückt werden,

$$\xi = -a\beta e^{\beta\theta} \sin\theta, \quad \eta = a\beta e^{\beta\theta} \cos\theta.$$

Um auch die Gleichung der Evolute in Polarcoordinaten zu haben, sei

$$\xi = R\cos\tau, \quad \eta = R\sin\tau;$$

es ergiebt sich dann

$$R = a\beta e^{\beta(\tau - \frac{1}{2}\pi)};$$

wird noch $\tau = \omega + \frac{1}{2}\pi$ gesetzt, so folgt, dass die Evolute der logarithmischen Spirale wieder eine logarithmische Spirale ist, bei welcher $a\beta$ statt a eintritt.

12. Die Cycloiden. Für die gemeine Cycloide gelten die Gleichungen

$$x = b(\omega - \sin\omega), \quad y = b(1 - \cos\omega),$$

aus welchen man erhält

$$\xi = b(\omega + \sin\omega), \quad \eta = -b(1 - \cos\omega).$$

Verlegt man das Coordinatensystem, indem man

$$\xi = \pi b - \xi_1, \quad \eta = \eta_1 - 2b$$

und ausserdem $\omega = \pi - \omega_1$ setzt, so gelangt man zu den neuen Gleichungen

$$\xi_1 = b(\omega_1 - \sin\omega_1), \quad \eta_1 = b(1 - \cos\omega_1),$$

welche zeigen, dass die Evolute mit der ursprünglichen Cycloide identisch und nur der Lage nach von ihr verschieden ist.

Für die Epicycloide hat man

$$x = (a+b)\sin\frac{b\omega}{a} - b\sin\frac{(a+b)\omega}{a},$$

$$y = (a+b)\cos\frac{b\omega}{a} - b\cos\frac{(a+b)\omega}{a}$$

und erhält aus denselben

$$\xi = \frac{a(a+b)}{a+2b}\sin\frac{b\omega}{a} + \frac{ab}{a+2b}\sin\frac{(a+b)\omega}{a},$$

$$\eta = \frac{a(a+b)}{a+2b}\cos\frac{b\omega}{a} + \frac{ab}{a+2b}\cos\frac{(a+b)\omega}{a}.$$

Vertauscht man das Coordinatensystem der ξ, η mit einem anderen gleichfalls rechtwinkligen Systeme der ξ_1, η_1, welches denselben Anfang hat und dessen Abscissenachse mit der Achse der ξ den Winkel γ einschliesst, so hat man bekanntlich

$$\xi = \xi_1 \cos\gamma - \eta_1 \sin\gamma, \quad \eta = \xi_1 \sin\gamma + \eta_1 \cos\gamma$$

oder umgekehrt

$$\xi_1 = \eta \sin\gamma + \xi \cos\gamma, \quad \eta_1 = \eta \cos\gamma - \xi \sin\gamma,$$

mithin vermöge der Werthe von ξ und η

$$\xi_1 = \frac{a(a+b)}{a+2b} \sin\left(\frac{b\omega}{a} + \gamma\right) + \frac{ab}{a+2b} \sin\left(\frac{(a+b)\omega}{a} + \gamma\right),$$

$$\eta_1 = \frac{a(a+b)}{a+2b} \cos\left(\frac{b\omega}{a} + \gamma\right) + \frac{ab}{a+2b} \cos\left(\frac{(a+b)\omega}{a} + \gamma\right).$$

Es sei noch

$$\gamma = -\pi\frac{b}{a}, \quad \omega = \pi + \omega_1,$$

$$\frac{a^2}{a+2b} = a_1, \quad \frac{ab}{a+2b} = b_1, \quad \text{also } \frac{b}{a} = \frac{b_1}{a_1};$$

die vorigen Gleichungen werden dann

$$\xi_1 = (a_1 + b_1) \sin\frac{b_1\omega_1}{a_1} - b_1 \sin\frac{(a_1+b_1)\omega_1}{a_1},$$

$$\eta_1 = (a_1 + b_1) \cos\frac{b_1\omega_1}{a_1} - b_1 \cos\frac{(a_1+b_1)\omega_1}{a_1},$$

woraus hervorgeht, dass die Evolute einer Epicycloide immer eine Curve derselben Art ist, in welcher die Radien des festen und des rollenden Kreises in demselben Verhältnisse stehen, wie bei der ursprünglichen Curve.

Nimmt man z. B. die Radien a und b gleich, so ist die ursprüngliche Curve eine Cardioide, ebenso ist auch die Evolute eine Cardioide mit dem Radius $a_1 = b_1 = \frac{1}{3}a$ (vergl. Aufgabe 6).

Für die Hypocycloide gelten ganz ähnliche Formeln, aus denen der analoge Satz folgt, dass die Evolute eine mit den Radien

$$a_1 = \frac{a^2}{a-2b}, \quad b_1 = \frac{ab}{a-2b}$$

construirte Hypocycloide ist.

§ 18.

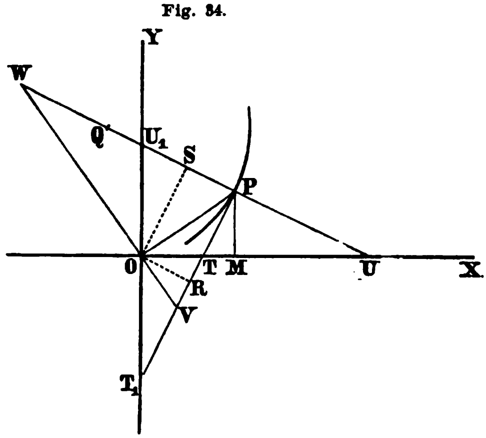
Die Endpunkte der Polartangenten und Polarnormalen.

I. Bezeichnen u und v die rechtwinkligen Coordinaten des Punktes V in Fig. 34, welcher der Endpunkt der Polartangente ist, so hat man

$$u = -\frac{y(y - xy')}{x + yy'}, \quad v = \frac{x(y - xy')}{x + yy'};$$

unter Zuhülfenahme der Gleichung der Curve kann man aus diesen Gleichungen x und y eliminiren, so dass nur eine Gleichung

Fig. 34.



zwischen u und v übrig bleibt, welche den geometrischen Ort des Punktes V bestimmt.

1. Für die Ellipse ergeben sich, wenn man von der Mittelpunktsgleichung

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

ausgeht, die Werthe

$$u = -\frac{a^2 b^2}{(a^2 - b^2)x}, \quad v = \frac{a^2 b^2}{(a^2 - b^2)y},$$

mithin durch Elimination von x und y

$$a^2 u^2 + b^2 v^2 = \left(\frac{a^2 - b^2}{ab}\, uv\right)^2.$$

Bei der Hyperbel gestaltet sich die Gleichung ähnlich.

2. Nimmt man den Scheitel eines Kegelschnittes zum Coordinatenanfang und demgemäss

$$y = \sqrt{2hx + kx^2},$$

so erhält man

$$u = -\frac{hx}{h + (1+k)x}, \quad v = \frac{hx^2}{[h + (1+k)x]y},$$

folglich

$$v^2 = -\frac{u^3}{2h + (2+k)u}.$$

Die semicubische Parabel und die Cissoide sind specielle Fälle dieser Curve.

3. Ist ein **Brennpunkt** eines **Kegelschnittes** der Coordinatenanfang, mithin

$$y = \sqrt{h^2 - 2h\varepsilon x + (\varepsilon^2 - 1)x^2},$$

so wird

$$u = \frac{h}{\varepsilon}, \quad v = -\frac{hx}{\varepsilon y}.$$

Der geometrische Ort des Endpunktes der Polartangente ist dann eine Parallele zur Ordinatenachse und zwar die Directrix des Kegelschnittes.

4. Falls die Gleichung der ursprünglichen Curve in Polarcoordinaten gegeben ist, treten an die Stelle der vorigen allgemeinen Formeln für u und v die folgenden

$$u = \frac{r^2}{r'} \sin\theta, \quad v = -\frac{r^2}{r'} \cos\theta,$$

aus welchen dann unter Zuhülfenahme der Polargleichung der gegebenen Curve eine Gleichung zwischen u und v hergeleitet werden muss.

Für die **reciproke parabolische Spirale** hat man z. B.

$$r^2 = \frac{a^2}{\theta},$$

$$u = -2a\sqrt{\theta} \cdot \sin\theta, \quad v = +2a\sqrt{\theta} \cdot \cos\theta$$

$$u^2 + v^2 = 4a^2\theta,$$

woraus hervorgeht, dass die Endpunkte der Polartangenten in einer parabolischen Spirale liegen.

5. Die Gleichung

$$r = \frac{h}{\theta + \varepsilon \sin\theta}$$

charakterisirt eine Curve, von welcher die hyperbolische Spirale ein besonderer Fall ist; man erhält

$$u = -\frac{h \sin\theta}{1+\varepsilon\cos\theta}, \quad v = +\frac{h\cos\theta}{1+\varepsilon\cos\theta},$$

$$u^2 + v^2 = \left(\frac{h}{1+\varepsilon\cos\theta}\right)^2.$$

Der geometrische Ort des Endpunktes der Polartangente ist in diesem Falle ein Kegelschnitt, wovon ein Brennpunkt mit dem Coordinatenanfange zusammenfällt, und dessen Hauptachse parallel der Ordinatenachse liegt.

II. Bezeichnen u und v die rechtwinkligen Coordinaten des Endpunktes W der Polarnormale, so gelten die Formeln

$$u = \frac{y(x+yy')}{y-xy'}, \quad v = -\frac{x(x+yy')}{y-xy'};$$

unter Zuziehung der Gleichung der Curve lassen sich x und y eliminiren, so dass eine Gleichung zwischen u und v übrig bleibt, welche den geometrischen Ort des Endpunktes der Polarnormale bestimmt.

6. Aus der Mittelpunktsgleichung der Ellipse folgen die Werthe

$$u = \frac{(a^2-b^2)xy^2}{a^2b^2}, \quad v = -\frac{(a^2-b^2)x^2y}{a^2b^2},$$

welche geben

$$(a^2u^2 + b^2v^2)^3 = a^2b^2(a^2-b^2)^2u^2v^2.$$

Für die Hyperbel gestaltet sich die Gleichung ähnlich.

7. Legt man bei irgend einem Kegelschnitte den Coordinatenanfang in den Scheitel, so hat man

$$u = \frac{2h+kx}{k}[h + (1+k)x],$$

$$v = -\frac{\sqrt{2hx+kx^2}}{k}[h+(1+k)x].$$

Die Combination

$$\frac{u}{v} = -\sqrt{\frac{2h+kx}{x}}$$

dient hier, um x durch u und v auszudrücken; setzt man den so erhaltenen Werth in eine der vorhergehenden Gleichungen ein, so gelangt man zu dem Resultate

$$(u^2 - kv^2)^2 = 2hu\,[u^2 + (2+k)v^2].$$

8. Falls die ursprüngliche Curve auf Polarcoordinaten bezogen ist, hat man

$$u = -r' \sin\theta, \quad v = +r' \cos\theta,$$

woraus eine Gleichung zwischen u und v herzuleiten ist.

Bei der Cardioide, deren Gleichung

$$r = 2a(1 + \cos\theta)$$

sein möge, gelten die Werthe

$$u = 2a \sin^2\theta, \quad v = -2a \sin\theta \cos\theta,$$

welche geben

$$v^2 = 2au - u^2;$$

der geometrische Ort des Endpunktes der Polarnormale ist hier der Kreis, welcher zur Construction der Cardioide dient.

9. Für die Curve, deren Gleichung ist

$$r = a \tan \tfrac{1}{2}\theta,$$

erhält man als Gleichung des geometrischen Ortes von W

$$u^2 + 2av = a^2;$$

letzterer ist also eine Parabel.

10. Für die Curve, deren Gleichung ist

$$r = al \cot \tfrac{1}{2}\theta,$$

findet man

$$u = a, \quad v = -a \cot\theta;$$

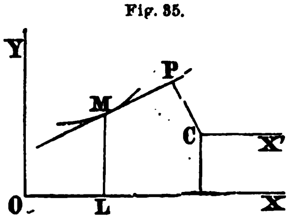
der gesuchte Ort besteht hier aus einer Parallelen zur Ordinatenachse.

§ 19.

Die Fusspunktcurven.

Lässt man von einem festen Punkte C (Fig. 35) Senkrechte auf alle Tangenten einer gegebenen Curve herab, so bilden die Fusspunkte P jener Perpendikel eine neue krumme Linie, deren Gleichung auf folgende Weise gefunden wird.

Fig. 35.



Bezeichnen g, h die rechtwinkligen Coordinaten des sogenannten Poles C, x und y die Coordinaten eines beliebigen Punktes M der gegebenen Curve, u und v die Coordinaten des entsprechenden Fusspunktes P, so gelten für letztere die Gleichungen

$$v - y = y'(u - x), \quad v - h = -\frac{1}{y'}(u - g),$$

woraus z. B. folgt

$$u - g = \frac{(x-g)y'^2 - (y-h)y'}{1+y'^2},$$

$$v - h = -\frac{(x-g)y' - (y-h)}{1+y'^2}.$$

Unter Zuhülfenahme der zwischen x und y bestehenden Gleichung lassen sich aus irgend zweien der obigen vier Gleichungen x und y eliminiren; die übrig bleibende Gleichung zwischen u und v bestimmt die Natur der Fusspunktcurve.

1. Die Parabel. Von der Gleichung ausgehend

$$y^2 = 4ax$$

kann man die zwei ersten Gleichungen zwischen u und v folgendermassen darstellen:

$$yv = 2au + \tfrac{1}{2}y^2, \quad 2a(v-h) = -y(u-g);$$

man erhält dann durch Elimination von y

$$u(u-g)^2 + (u-g)(v-h)v + a(v-h)^2 = 0.$$

Wird der Brennpunkt zum Pol genommen, so ergiebt sich einfach $u = 0$, d. h. die Scheiteltangente ist dann die Fusspunktlinie; im Fall der Parabelscheitel zum Pol genommen wird, geht die Fusspunktcurve in eine Cissoide über.

2. Ellipse und Hyperbel. Die Gleichung der Ellipse sei

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1;$$

die beiden ersten Gleichungen zwischen u und v lauten dann

$$b^2ux + a^2vy = a^2b^2, \quad b^2(v-h)x - a^2(u-g)y = 0.$$

Bestimmt man hieraus x und y, und setzt die gefundenen Ausdrücke in die Ellipsengleichung, so erhält man

$$[u(u-g) + v(v-h)]^2 = a^2(u-g)^2 + b^2(v-h)^2.$$

Diese Gleichung der Fusspunktcurve lässt sich etwas einfacher darstellen, wenn der Pol C zum Anfang eines Polarcoordinatensystems genommen wird, dessen Achse CX' parallel zur x-Achse liegt und worin die Senkrechte $CP = p$ der Radiusvector und $\angle X'CP = \chi$ der Polarwinkel ist; es ergiebt sich

$$(p + g\cos\chi + h\sin\chi)^2 = a^2\cos^2\chi + b^2\sin^2\chi.$$

Nimmt man einen Brennpunkt der Ellipse zum Pol, so wird die Fusspunktcurve ein Kreis; liegt der Pol im Ellipsenmittelpunkte, so entsteht die auf Seite 102 Aufgabe 17 betrachtete Curve. Für $b = a$, $g = -a$, $h = 0$ geht die Fusspunktcurve in eine Cardioide über.

Um die entsprechenden Formeln für die Hyperbel zu erhalten, bedarf es nur der Vertauschung von b^2 gegen $-b^2$. In dem speciellen Falle, wo die Hyperbel eine gleichseitige ist und ihr Mittelpunkt zum Pol genommen wird, ergiebt sich

$$p^2 = a^2 \cos^2 2\chi;$$

die Fusspunktcurve ist dann eine Lemniscate.

3. Die semicubische Parabel. Die Gleichung der Curve sei

$$y = \tfrac{2}{3}\sqrt{\frac{x^3}{a}},$$

ferner $g = -\frac{1}{3}a$, $h = 0$; für u und v gelten dann die Gleichungen

$$v = (u - \tfrac{1}{3}x)\sqrt{\frac{x}{a}}, \quad v = -(u + \tfrac{1}{3}a)\sqrt{\frac{a}{x}}.$$

Substituirt man den Werth von x aus der zweiten Gleichung in das Product beider Gleichungen, so erhält man

$$v^4 + u(u + \tfrac{1}{3}a)v^2 - \tfrac{1}{3}a(u + \tfrac{1}{3}a)^3 = 0,$$

oder

$$[v^2 + (u + \tfrac{1}{3}a)^2]\,[v^2 - \tfrac{1}{3}a(u + \tfrac{1}{3}a)] = 0;$$

der erste Factor kann nur für einen isolirten Punkt verschwinden, die Fusspunktcurve hat daher zur Gleichung

$$v^2 = \tfrac{1}{3}a(u + \tfrac{1}{3}a)$$

und ist demgemäss eine Parabel.

4. Die ursprüngliche Curve sei bestimmt durch die Gleichung

$$(x^2 + y^2 - a^2)^3 + 27\,a^2x^2y^2 = 0;$$

um Weitläufigkeiten zu entgehen, ersetze man diese Gleichung durch die beiden Gleichungen (Seite 98 Aufg. 12)

$$x = a\cos^3\omega, \quad y = a\sin^3\omega,$$

drücke dem entsprechend u und v durch ω aus und eliminire schliesslich ω. Wegen $y' = -\tan\omega$ gehen die Gleichungen für u und v in die folgenden über

$$u\sin\omega + v\cos\omega = a\sin\omega\cos\omega, \quad v - h = (u - g)\cot\omega,$$

aus denen sich ergiebt

$$u(u-g)+v(v-h)=\frac{a(u-g)(v-h)}{\sqrt{(u-g)^2+(v-h)^2}},$$

oder in Polarcoordinaten, welche ebenso wie bei der vorigen Aufgabe zu wählen sind,

$$p=a\cos\chi\sin\chi-(g\cos\chi+h\sin\chi).$$

5. Am einfachsten gestalten sich die Formeln, wenn man gleich anfangs den Pol zum Anfangspunkte von Polarcoordinaten wählt und demgemäss substituirt

$$g=0,\ h=0,$$
$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,\quad u=p\cos\chi,\quad v=p\sin\chi;$$

die allgemeinen Gleichungen gehen dann über in

$$[r\cos(\theta-\chi)+r'\sin(\theta-\chi)]p=r^2,\quad r'=r\tan(\theta-\chi)$$

oder, wenn man r' aus der zweiten Gleichung in die erste substituirt,

$$p=r\cos(\theta-\chi),\quad r'=r\tan(\theta-\chi),$$

wie man auch direct mittelst einer einfachen geometrischen Betrachtung findet.

Als Beispiel mögen die Curven dienen, welche durch die Gleichung

$$r^m=a^m\cos m\theta$$

repräsentirt werden und zu denen u. A. die gleichseitige Hyperbel ($m=-2$), die Parabel ($m=-\frac{1}{2}$), die Cardioide ($m=+\frac{1}{2}$), der Kreis ($m=+1$) und die Lemniscate ($m=+2$) gehören. Die allgemeinen Gleichungen sind hier

$$p=a(\cos m\theta)^{\frac{1}{m}}\cos(\theta-\chi),\quad \tan m\theta=\tan(\chi-\theta);$$

aus der letzten Gleichung folgt $\theta=\frac{\chi}{m+1}$ und nachher aus der ersten

$$p^n=a^n\cos n\chi,\quad n=\frac{m}{m+1}.$$

Die Fusspunktcurve ist hier von derselben Gattung wie die ursprüngliche Curve; der gleichseitigen Hyperbel z. B. entspricht die Lemniscate.

6. Die logarithmische Spirale. Aus der Gleichung

$$r=ae^{\beta\theta}$$

erhält man

$$p = a e^{\beta\theta} \cos(\theta - \chi), \quad \beta = \tan(\theta - \chi),$$

mithin durch Substitution von θ aus der zweiten Gleichung in die erste

$$p = a_1 e^{\beta\chi}, \quad a_1 = \frac{a}{\sqrt{1+\beta^2}} e^{\beta \operatorname{arc} \tan \beta};$$

die Fusspunktcurve ist also wieder eine logarithmische Spirale.

7. Die Kreisevolvente. Wenn die Curve durch die beiden Gleichungen

$$r = a\sqrt{1+\omega^2}, \quad \theta = \omega - \operatorname{arc} \tan \omega$$

repräsentirt wird, so hat man

$$p = a\sqrt{1+\omega^2} \cdot \cos(\theta - \chi), \quad \tan(\theta - \chi) = \frac{1}{\omega};$$

die letztere Gleichung giebt einerseits

$$\cos(\theta - \chi) = \frac{\omega}{\sqrt{1+\omega^2}},$$

andererseits

$$\theta - \chi = \operatorname{Arc} \tan \frac{1}{\omega}$$

oder

$$\omega - \operatorname{Arc} \tan \omega - \chi = \tfrac{1}{2}\pi - \operatorname{Arc} \tan \omega, \quad \omega = \tfrac{1}{2}\pi + \chi,$$

mithin ist nach Substitution der Werthe von $\cos(\theta - \chi)$ und ω

$$p = a\left(\tfrac{1}{2}\pi + \chi\right).$$

Die Fusspunktcurve ist also einerlei mit der Spirale des Archimedes.

Capitel VI.

Die Discussion doppelt gekrümmter Curven.

§ 20.

Allgemeine Regeln und Formeln.

Wenn die gegebene Curve auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem der x, y, z bezogen ist, so gilt für das Bogenelement ds die Formel

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2};$$

im Fall die Curve durch ihre Projectionen auf die Horizontalebene xy und die Verticalebene xz, mithin durch zwei Gleichungen von den Formen $y = \varphi(x)$ und $z = \psi(x)$ bestimmt ist, hat man statt der obigen Formel zu schreiben

$$ds = \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} \cdot dx.$$

Die Winkel τ_x, τ_y, τ_z, welche die Tangente im Punkte xyz mit den Coordinatenachsen bildet, bestimmen sich durch die Formeln

$$\cos\tau_x = \frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}},$$

$$\cos\tau_y = \frac{dy}{ds} = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}},$$

$$\cos\tau_z = \frac{dz}{ds} = \frac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}.$$

Die Gleichungen der Tangente sind

$$\frac{\xi - x}{\frac{dx}{ds}} = \frac{\eta - y}{\frac{dy}{ds}} = \frac{\zeta - z}{\frac{dz}{ds}},$$

oder

$$\eta - y = y'(\xi - x), \quad \zeta - z = z'(\xi - x).$$

Die Gleichung der Normalebene ist

$$\frac{dx}{ds}(\xi - x) + \frac{dy}{ds}(\eta - y) + \frac{dz}{ds}(\zeta - z) = 0,$$

oder

$$\xi - x + y'(\eta - y) + z'(\zeta - z) = 0.$$

Um den Krümmungshalbmesser und die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes zu finden, berechnet man zuerst die drei Grössen

$$X = dy\, d^2z - d^2y\, dz,$$
$$Y = dz\, d^2x - d^2z\, dx,$$
$$Z = dx\, d^2y - d^2x\, dy;$$

die Gleichung der Krümmungsebene ist dann

$$X(\xi - x) + Y(\eta - y) + Z(\zeta - z) = 0;$$

ferner gelten für die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes die Formeln

$$\xi - x = \frac{Y dz - Z dy}{X^2 + Y^2 + Z^2} ds^2,$$

$$\eta - y = \frac{Z dx - X dz}{X^2 + Y^2 + Z^2} ds^2,$$

$$\zeta - z = \frac{X dy - Y dx}{X^2 + Y^2 + Z^2} ds^2,$$

und der Krümmungsradius ist

$$\varrho = \frac{ds^3}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}.$$

Statt dieser Formeln kann auch geschrieben werden

$$\varrho = \frac{ds^2}{\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\left[\frac{d\left(\frac{dx}{ds}\right)}{ds}\right]^2 + \left[\frac{d\left(\frac{dy}{ds}\right)}{ds}\right]^2 + \left[\frac{d\left(\frac{dz}{ds}\right)}{ds}\right]^2}},$$

$$\xi - x = \varrho^2 \frac{d\left(\frac{dx}{ds}\right)}{ds}, \quad \eta - y = \varrho^2 \frac{d\left(\frac{dy}{ds}\right)}{ds}, \quad \zeta - z = \varrho^2 \frac{d\left(\frac{dz}{ds}\right)}{ds}.$$

Nimmt man x als unabhängige Variabele, so hat man als Gleichung der Krümmungsebene

$$(y'z'' - y''z')(\xi - x) - z''(\eta - y) + y''(\zeta - z) = 0,$$

oder

$$\left(\frac{y'}{y''} - \frac{z'}{z''}\right)(\xi - x) - \frac{1}{y''}(\eta - y) + \frac{1}{z''}(\zeta - z) = 0;$$

der Krümmungshalbmesser wird

$$\varrho = \sqrt{\left\{\frac{(1 + y'^2 + z'^2)^3}{(y'z'' - y''z')^2 + y''^2 + z''^2}\right\}}$$

und die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes sind

$$\xi - x = -\varrho^2 \frac{y'y'' + z'z''}{(1 + y'^2 + z'^2)^2},$$

$$\eta - y = \varrho^2 \frac{y'' - (y'z'' - y''z')z'}{(1 + y'^2 + z'^2)^2},$$

$$\zeta - z = \varrho^2 \frac{z'' + (y'z'' - y''z')y'}{(1 + y'^2 + z'^2)^2}.$$

In den Fällen, wo sich x, y, z durch die unabhängige Variabele s ausdrücken lassen, ist

$$\varrho = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}},$$

$$\xi - x = \varrho^2 \frac{d^2x}{ds^2}, \quad \eta - y = \varrho^2 \frac{d^2y}{ds^2}, \quad \zeta - z = \varrho^2 \frac{d^2z}{ds^2}.$$

Um den Halbmesser der zweiten Krümmung, den sogenannten Torsionsradius zu bestimmen, berechnet man zuerst die Grösse

$$S = (d^2x\,d^3y - d^3x\,d^2y)\,dz + (d^2z\,d^3x - d^3z\,d^2x)\,dy + (d^2y\,d^3z - d^3y\,d^2z)\,dx;$$

es ist dann

$$\varrho_1 = \frac{X^2 + Y^2 + Z^2}{S} = \frac{ds^6}{\varrho^2 S}.$$

Wird x als unabhängige Variabele angesehen, so ist einfacher

$$\varrho_1 = \frac{(1 + y'^2 + z'^2)^3}{\varrho^2 (y''z''' - y'''z'')}.$$

Im Fall bei jedem x die Gleichung $S = 0$ stattfindet, liegt die Curve in einer Ebene, welche mit der Krümmungsebene identisch ist.

Zwei durch die Punkte xyz und $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ gelegte Normalebenen schneiden sich in einer Geraden, welche durch die Gleichungen beider Ebenen, nämlich

$$(\xi - x)\,dx + (\eta - y)\,dy + (\zeta - z)\,dz = 0,$$
$$(\xi - x)\,d^2x + (\eta - y)\,d^2y + (\zeta - z)\,d^2z = ds^2$$

bestimmt ist. Alle diese Geraden bilden stetig auf einander folgend eine Regelfläche, die sogenannte Evolutenfläche; ihre Gleichung ergiebt sich dadurch, dass man x aus den vorstehenden Gleichungen eliminirt.

§ 21.

Beispiele.

1. **Durchschnitt zweier parabolischen Cylinder.** Die Gleichungen der beiden Cylinder mögen sein

$$y = \frac{x^2}{2a}, \quad z = \frac{x^3}{6a^2};$$

es ergeben sich dann folgende Werthe

$$\cos\tau_x = \frac{2a^2}{2a^2 + x^2}, \quad \cos\tau_y = \frac{2ax}{2a^2 + x^2}, \quad \cos\tau_z = \frac{x^2}{2a^2 + x^2}.$$

Die Gleichungen der Tangente sind

$$\eta = \frac{x}{a}\xi - \frac{x^2}{2a}, \quad \zeta = \frac{x^2}{2a^2}\xi - \frac{x^3}{3a^2}.$$

Die Punkte, in welchen die Tangente die Coordinatenebenen schneidet, d. h. die Spuren der Tangente, bestimmen sich hiernach durch folgende Formeln

$$\xi_1 = \tfrac{2}{3}x, \quad \eta_1 = \tfrac{1}{6}\frac{x^2}{a}, \quad \zeta_1 = 0,$$
$$\xi_2 = \tfrac{1}{2}x, \quad \eta_2 = 0, \quad \zeta_2 = -\tfrac{1}{12}\frac{x^3}{a^2},$$
$$\xi_3 = 0, \quad \eta_3 = -\tfrac{1}{2}\frac{x^2}{a}, \quad \zeta_3 = -\tfrac{1}{3}\frac{x^3}{a^2};$$

lässt man den Punkt xyz auf der Curve im Raume fortrücken, so beschreibt die erste Tangentenspur eine Parabel zweiten Grades, die zweite eine Parabel dritten Grades, die dritte eine semicubische Parabel.

Aus den beiden Gleichungen der Tangente erhält man durch Elimination von x die Gleichung derjenigen windschiefen Fläche, welche von den auf einander folgenden Tangenten gebildet wird, nämlich

$$(\xi^3 - 3a\xi\eta + 3a^2\zeta)^2 = (\xi^2 - 2a\eta)^3.$$

Die Gleichung der Normalebene ist

$$2a^2\xi + 2ax\eta + x^2\zeta = \frac{x(12a^4 + 6a^2x^2 + x^4)}{6a^2},$$

woraus u. A. die Gleichungen der Spuren dieser Ebene hergeleitet werden können.

Ferner ist
$$\varrho = \frac{(2a^2 + x^2)^2}{4a^3} = a\sec^2\tau_x$$

und für die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes hat man

$$\xi = -\frac{x^3}{2a^2}, \quad \eta = \frac{4a^4 + 2a^2x^2 - x^4}{4a^3}, \quad \zeta = \frac{x(3a^2 + 2x^2)}{3a^2}.$$

Bildet man hieraus durch Elimination von x zwei Gleichungen zwischen ξ, η, ζ, so bestimmen diese Gleichungen den geometrischen Ort der Krümmungsmittelpunkte.

Für den Halbmesser der zweiten Krümmung ergiebt sich

$$\varrho_1 = \varrho.$$

2. Durchschnitt eines parabolischen und eines gleichseitig hyperbolischen Cylinders. Die Gleichungen der beiden Cylinder seien

$$y = 2\sqrt{b(x-a)}, \quad z = \frac{c^2}{x};$$

die Gleichungen der Tangente sind dann

$$\eta = \sqrt{\frac{b}{x-a}}\{\xi + x - 2a\}, \quad \zeta = \frac{c^2}{x^2}(-\xi + 2x).$$

Legt man durch einen zweiten Punkt $x_1y_1z_1$ gleichfalls eine Tangente, so ist ebenso

$$\eta = \sqrt{\frac{b}{x_1-a}}\{\xi + x_1 - 2a\}, \quad \zeta = \frac{c^2}{x_1^2}(-\xi + 2x_1),$$

und es kann nun die Frage gestellt werden, ob sich beide Tangenten schneiden oder nicht. Für den Durchschnitt der Horizontalprojectionen beider Tangenten ergiebt sich

$$\xi_I = \sqrt{(x-a)(x_1-a)} + a,$$

für den Durchschnitt der zugehörigen Verticalprojectionen ist

$$\xi_{II} = \frac{2xx_1}{x+x_1},$$

und wenn sich beide Tangenten schneiden sollen, so muss $\xi_I = \xi_{II}$ sein; daraus folgt

$$x_1 = \frac{ax}{x-a}, \quad y_1 = 2a\sqrt{\frac{b}{x-a}}, \quad z_1 = \frac{c^2(x-a)}{ax}.$$

Beiläufig sei erwähnt, dass hiernach das harmonische Mittel zwischen x und x_1, das geometrische Mittel zwischen y und y_1, sowie das arithmetische Mittel zwischen z und z_1 constante Grössen sind. Die Tangenten am Punkte xyz und an dem nunmehr bestimmten Punkte $x_1y_1z_1$ schneiden sich im Punkte

$$\xi = 2a, \quad \eta = x\sqrt{\frac{b}{x-a}}, \quad \zeta = \frac{2c^2(x-a)}{x^2};$$

alle diese Durchschnitte liegen auf einer Ebene, welche im Abstande $2a$ parallel zur Ebene yz ist, und bilden zusammen eine durch die Gleichung

$$\eta^2\zeta = 2bc^2$$

bestimmte Curve dritten Grades.

3. Durchschnitt eines cubisch-parabolischen und eines gleichseitig-hyperbolischen Cylinders. Die gegebenen Gleichungen seien

$$y = \frac{(x-a)^3}{3b^2}, \quad z = \frac{c^2}{x};$$

für die Tangente hat man dann

$$\eta = \frac{(x-a)^2}{b^2}\left\{\xi - \frac{2x+a}{3}\right\}, \quad \zeta = \frac{c^2}{x^2}(-\xi + 2x).$$

Die Tangente am Punkte

$$x_1 = \tfrac{3}{2}a - x, \quad y_1 = \frac{(a-2x)^3}{24b^2}, \quad z_1 = \frac{2c^2}{3a-2x}$$

schneidet die erste Tangente, und zwar sind die Coordinaten des Durchschnitts

$$\xi = \frac{2x(3a-2x)}{3a}, \quad \eta = -\frac{(x-a)^2(2x-a)^2}{3ab^2}, \quad \zeta = \frac{4c^2}{3a};$$

die stetig auf einander folgenden Durchschnitte bilden hiernach eine Parabel, deren Ebene parallel zur xy-Ebene liegt und deren Gleichung ist

$$a(3\xi - 2a)^2 + 12b^2\eta = 0.$$

4. Durchschnitt eines hyperbolischen und eines parabolischen Cylinders. Sind die gegebenen Gleichungen

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2+x^2}, \quad z = 2\sqrt{cx},$$

so hat man als Gleichungen der Tangente

$$\eta = \frac{b}{a}\cdot\frac{x\xi + a^2}{\sqrt{a^2+x^2}}, \quad \zeta = \sqrt{\frac{c}{x}}(\xi + c).$$

Soll diese Tangente eine durch den Punkt $x_1 y_1 z_1$ gehende Tangente schneiden, so muss die Bedingung

$$\frac{\sqrt{(a^2+x^2)(a^2+x_1^2)} - a^2 + xx_1}{x+x_1} = \sqrt{xx_1}$$

erfüllt sein, woraus die zur Bestimmung von x_1, y_1, z_1 dienenden Gleichungen folgen

$$xx_1 = a^2, \quad xy_1 = ay, \quad zz_1 = 4ac.$$

Die Coordinaten des Durchschnitts beider Tangenten sind

$$\xi = a, \quad \eta = \frac{b(a+x)}{\sqrt{a^2+x^2}}, \quad \zeta = (a+x)\sqrt{\frac{c}{x}};$$

alle Durchschnitte bilden zusammen eine ebene, in der Entfernung a parallel zu xy liegende Curve vierten Grades, deren Gleichung ist

$$\frac{b^2}{\eta^2} + \frac{2ac}{\zeta^2} = 1.$$

5. Durchschnitt eines Kreiscylinders und einer Kugel. Die Gleichungen beider Flächen mögen sein

$$y^2 = x(a-x), \quad x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$$

so dass der Durchmesser des Cylinders dem Halbmesser der Kugel gleichkommt; es sind dann

$$y = \sqrt{x(a-x)}, \quad z = \sqrt{a(a-x)}$$

die Gleichungen des Durchschnittes beider Flächen. Hieraus folgen die Werthe

$$\cos\tau_x = 2\sqrt{\frac{x(a-x)}{a(a+x)}}, \quad \cos\tau_y = \frac{a-2x}{\sqrt{a(a+x)}}, \quad \cos\tau_z = -\sqrt{\frac{x}{a+x}};$$

die Gleichungen der Tangente sind

$$\eta = \frac{(a-2x)\xi + ax}{2\sqrt{x(a-x)}}, \quad \zeta = -\frac{\sqrt{a}[\xi - (2a-x)]}{2\sqrt{a-x}};$$

ferner ist die Gleichung der Normalebene

$$2y\xi + (a-2x)\eta - \sqrt{ax}\cdot\zeta = 0.$$

Für den Halbmesser der ersten Krümmung findet man

$$\varrho = \sqrt{\frac{(a+x)^3}{5a+3x}}$$

und für den der zweiten

$$\varrho_1 = \frac{5a+3x}{6}\sqrt{\frac{a}{x}}.$$

Die Gleichungen zweier auf einander folgenden Normalebenen sind

$$2\sqrt{x(a-x)}\cdot\xi + (a-2x)\eta = \sqrt{ax}\cdot\zeta$$

$$(a-2x)\xi - 2\sqrt{x(a-x)}\cdot\eta = \tfrac{1}{2}\sqrt{a(a-x)}\cdot\zeta.$$

Quadrirt und addirt man dieselben, so erhält man

$$a(4\xi^2 + 4\eta^2 - \zeta^2) = 3\zeta^2 x;$$

eliminirt man dagegen ξ aus beiden vorigen Gleichungen, so bleibt

$$a^2\eta = -x\sqrt{ax}\cdot\zeta \text{ oder } a^3\eta^2 = \zeta^2 x^3;$$

endlich giebt die Elimination von x aus den letzten Gleichungen

$$[4(\xi^2+\eta^2) - \zeta^2]^3 - 27\eta^2\zeta^4 = 0.$$

Hierdurch bestimmt sich die Evolutenfläche, welche im vorliegenden Falle eine Kegelfläche ist.

6. Durchschnitt eines hyperbolischen und eines Kettencylinders. Die Gleichungen der beiden Flächen mögen sein

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad x = \tfrac{1}{2}a\left(e^{\frac{z}{a}} + e^{-\frac{z}{a}}\right)$$

und zur Abkürzung werde die numerische Excentricität der Hyperbel mit ε bezeichnet; es gelten dann die Formeln

$$\cos\tau_x = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{\varepsilon x}, \quad \cos\tau_y = \frac{b}{a\varepsilon}, \quad \cos\tau_z = \frac{a}{\varepsilon x},$$

von denen namentlich die zweite bemerkenswerth ist.

Die Gleichungen der Tangente lauten

$$\eta - y = \frac{bx}{a\sqrt{x^2-a^2}}(\xi - x), \quad \zeta - z = \frac{a}{\sqrt{x^2-a^2}}(\xi - x);$$

die Normalebene ist durch die Gleichung bestimmt

$$a\sqrt{x^2-a^2}(\xi - x) + bx(\eta - y) + a^2(\zeta - z) = 0,$$

und schneidet die xz-Ebene immer unter demselben Winkel.

Für die beiden Krümmungsradien erhält man

$$\varrho = \frac{\varepsilon^2 x^2}{a}, \quad \varrho_1 = \frac{\varepsilon^2 x^2}{b},$$

woraus $\varrho_1 : \varrho = a : b$ folgt.

7. Durchschnitt eines parabolischen und eines cycloidischen Cylinders. In der Horizontalebene xy (Fig. 36) sei eine Parabel als Directrix eines vertical stehenden Cylinders durch die Gleichung

$$y = 2\sqrt{ax}$$

bestimmt, in der Verticalebene xz sei eine Cycloide ONC als Directrix eines horizontalen Cylinders genommen, dabei AC die halbe Basis, O der Scheitel der Cycloide, OA der Durchmesser des rollenden Kreises $= b$, so dass die Gleichungen

$$x = \tfrac{1}{2}b(1 + \cos\omega),$$
$$z = \tfrac{1}{2}b(\pi - \omega + \sin\omega)$$

oder für $\omega = \pi - \psi$

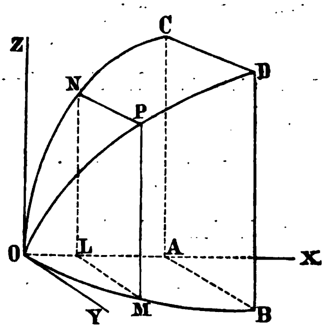
$$x = \tfrac{1}{2}b(1 - \cos\psi), \quad z = \tfrac{1}{2}b(\psi + \sin\psi)$$

stattfinden, welche man zu der einen Gleichung

$$z = \tfrac{1}{2}b\, Arc\cos\frac{b-2x}{b} + \sqrt{bx - x^2}$$

zusammenziehen kann. Aus den beiden Gleichungen ergeben sich folgende Werthe

Fig. 36.



$$\cos\tau_x = \sqrt{\frac{x}{a+b}}, \quad \cos\tau_y = \sqrt{\frac{a}{a+b}}, \quad \cos\tau_z = \sqrt{\frac{b-x}{a+b}},$$

von denen namentlich der zweite bemerkenswerth ist.

Als Gleichungen der Tangente hat man

$$\eta - y = \sqrt{\frac{a}{x}}(\xi - x), \quad \zeta - z = \sqrt{\frac{b-x}{x}}(\xi - x);$$

die Normalebene bestimmt sich durch die Gleichung

$$\sqrt{x}(\xi - x) + \sqrt{a}(\eta - y) + \sqrt{b-x}(\zeta - z) = 0$$

und schneidet die xz-Ebene immer unter demselben Winkel.

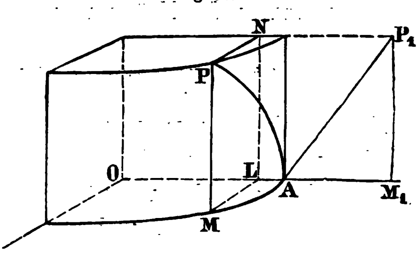
Für die beiden Krümmungshalbmesser findet man

$$\varrho = 2(a+b)\sqrt{\frac{b-x}{b}},$$

$$\varrho_1 = 2(a+b)\sqrt{\frac{b-x}{a}},$$

woraus folgt $\varrho^2 : \varrho_1^2 = a : b$.

Fig. 37.



8. Die Schraubenlinie (Fig. 37). Bezeichnet $OA = a$ den Radius des Cylinders, auf welchem die Schraubenlinie liegt, β den Steigungswinkel M_1AP_1 und ist ferner $OL = x$, $LM = y$, $MP = z$, $\angle AOM = \omega$, so gelten bekanntlich folgende Gleichungen

$$x = a\cos\omega, \quad y = a\sin\omega, \quad z = a\omega\tan\beta;$$

dabei lässt sich $a\tan\beta$ durch $\frac{h}{2\pi}$ ersetzen, wenn h die Höhe eines Schraubenganges bedeutet; zur Abkürzung sei noch

$$a\tan\beta = \frac{h}{2\pi} = b, \text{ mithin } z = b\omega.$$

Man findet zunächst

$$ds = \sqrt{a^2 + b^2}\cdot d\omega,$$

was auch aus der Entstehung der Schraubenlinie unmittelbar hervorgeht, ferner

$$\cos\tau_x = -\frac{y}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \cos\tau_y = \frac{x}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \cos\tau_z = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Die Verticalprojectionen der Tangente haben folgende Gleichungen

$$\xi - x = -\frac{y}{b}(\zeta - z), \quad \eta - y = +\frac{x}{b}(\zeta - z),$$

welche zu einer einfachen Tangentenconstruction führen. Lässt man den Punkt xyz auf der Schraubenlinie fortrücken, so beschreibt die Horizontalspur der Tangente eine Kreisevolvente, deren erzeugender Kreis den Radius a besitzt.

Die Normale bestimmt sich durch die Gleichung

$$-y\xi + x\eta + b\zeta = bz;$$

sie bildet mit der Horizontalebene immer denselben Neigungswinkel.

Der Halbmesser der ersten Krümmung ist constant, nämlich

$$\varrho = \frac{a^2+b^2}{a};$$

die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes sind

$$\xi = -\frac{b^2}{a}\cos\omega, \quad \eta = -\frac{b^2}{a}\sin\omega, \quad \zeta = b\omega,$$

und hier erkennt man augenblicklich, dass alle Krümmungsmittelpunkte wiederum auf einer Schraubenlinie liegen, welche die nämliche Achse wie die ursprüngliche Schraubenlinie besitzt, deren Radius aber $= a\tan^2\beta$ und deren Steigungswinkel $= 90^0 - \beta$ ist.

Der Radius der zweiten Krümmung ist gleichfalls constant, nämlich

$$\varrho_1 = \frac{a^2+b^2}{b}.$$

Die Normalebenen durch zwei auf einander folgende, den Winkeln ω und $\omega + d\omega$ entsprechende Punkte haben die Gleichungen

$$a\xi \sin\omega - a\eta \cos\omega = b\zeta - b^2\omega,$$

$$a\xi \cos\omega + a\eta \sin\omega = -b^2;$$

quadrirt und addirt man und setzt zur Abkürzung

$$\frac{b^2}{a} = a \tan^2\beta = c, \quad \frac{b}{a} = \tan\beta = \varkappa,$$

so erhält man

$$\omega = \frac{\varkappa\zeta \pm \sqrt{\xi^2 + \eta^2 - c^2}}{c}$$

und durch Substitution in die zweite Gleichung

$$\xi \cos\left(\frac{\varkappa\zeta \pm \sqrt{\xi^2 + \eta^2 - c^2}}{c}\right) + \eta \sin\left(\frac{\varkappa\zeta \pm \sqrt{\xi^2 + \eta^2 - c^2}}{c}\right) + c = 0;$$

dies ist die Gleichung der Evolutenfläche.

9. Die conische Schraubenlinie ist der Durchschnitt eines Rotationskegels und einer um dieselbe Achse beschriebenen Schraubenfläche; nimmt man die gemeinschaftliche Achse beider Flächen zur z-Achse, so hat man für x, y, z die beiden Gleichungen

$$x^2 + y^2 = z^2 \tan^2\gamma, \quad \frac{y}{x} = \tan\frac{z}{c},$$

oder, wenn $\frac{z}{c} = \omega$, $c \tan\gamma = b$ gesetzt wird,

$$x = b\omega \cos\omega, \quad y = b\omega \sin\omega, \quad z = c\omega,$$

woraus u. A. folgt, dass die Horizontalprojection der conischen Schraubenlinie eine archimedische Spirale ist.

Zur Abkürzung sei $b^2 + c^2 = a^2$; man erhält dann

$$\cos\tau_x = \frac{b(\cos\omega - \omega \sin\omega)}{\sqrt{a^2 + b^2\omega^2}} = \frac{c(cx - yz)}{z\sqrt{a^2c^2 + b^2z^2}},$$

$$\cos\tau_y = \frac{b(\sin\omega + \omega \cos\omega)}{\sqrt{a^2 + b^2\omega^2}} = \frac{c(cy + xz)}{z\sqrt{a^2c^2 + b^2z^2}},$$

$$\cos\tau_z = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2\omega^2}} = \frac{c^2}{\sqrt{a^2c^2 + b^2z^2}},$$

ferner als Gleichungen der Tangente

$$cz\xi = (cx - yz)\zeta + yz^2, \quad cz\eta = (cy + xz)\zeta - xz^2,$$

woraus z. B. folgt, dass die Horizontalspur der Tangente eine Spirale beschreibt, deren Vectoren proportional den Quadraten der Polarwinkel wachsen.

Die Gleichung der Normalebene ist

$$c(cx - yz)\xi + c(cy + xz)\eta + c^3\zeta = a^2z^2.$$

Für die beiden Krümmungshalbmesser findet man

$$\varrho = \frac{\sqrt{(a^2c^2 + b^2z^2)^3}}{bc\sqrt{4a^2c^4 + (4b^2 + c^2)c^2z^2 + b^2z^4}},$$

$$\varrho_1 = \frac{4a^2c^4 + (4b^2 + c^2)c^2z^2 + b^2z^4}{c^3(6c^2 + z^2)}.$$

Capitel VII.

Die Discussion der Flächen.

§ 22.

Allgemeine Regeln und Formeln.

Die Gleichung einer Fläche sei in rechtwinkligen Coordinaten ausgedrückt und zur Abkürzung

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y},$$

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

welche Differentialquotienten entweder direct oder nach § 12 berechnet werden, je nachdem die Gleichung der Fläche in der entwickelten Form $z = f(x, y)$ oder unentwickelt in der Form $F(x, y, z) = 0$ gegeben ist; die Berührungsebene im Punkte xyz hat dann zur Gleichung

$$p(\xi - x) + q(\eta - y) - (\zeta - z) = 0.$$

Die Stellungswinkel dieser Ebene, d. h. die Richtungswinkel der Normale im Punkte xyz bestimmen sich durch die Formeln

$$\cos \nu_x = -\frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}},$$

$$\cos \nu_y = -\frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}},$$

$$\cos \nu_z = +\frac{1}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}};$$

die Gleichungen der Normalen sind

$$\xi - x = -p(\zeta - z), \quad \eta - y = -q(\zeta - z).$$

Soll eine Ebene, deren Gleichung

$$\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta = 1$$

sein möge, die Normale in sich enthalten, so müssen die Bedingungen

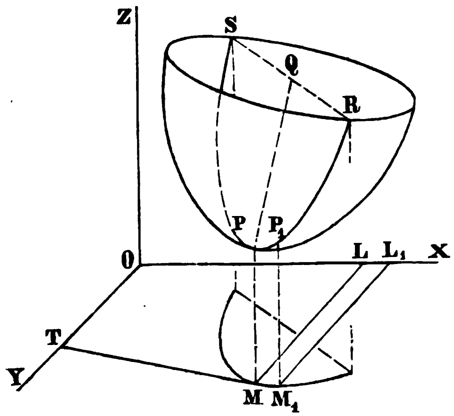
$$\gamma = \alpha p + \beta q, \quad \alpha x + \beta y + \gamma z = 1$$

erfüllt sein, wodurch die obige Gleichung übergeht in

$$\alpha(\xi - x) + \beta(\eta - y) + (\alpha p + \beta q)(\zeta - z) = 0;$$

das Verhältniss $\frac{\beta}{\alpha}$ bleibt hierbei willkürlich. Denkt man sich (Fig. 38) ausser dem Punkt xyz oder P, durch welchen die Normale PQ geht, einen zweiten Flächenpunkt P_1 mit den Coordinaten $x+dx, y+dy, z+dz$ und legt durch PQ und P_1 eine Ebene, so hat man ferner

Fig. 38.



$$\alpha dx + \beta dy + \gamma dz = 0,$$

oder wegen $\gamma = \alpha p + \beta q$ und $dz = p dx + q dy$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\alpha + (\alpha p + \beta q)p}{\beta + (\alpha p + \beta q)q}.$$

Da x und y von einander unabhängig sind, so bedeutet $\frac{dy}{dx}$ keinen eigentlichen Differentialquotienten, sondern das Verhältniss zweier beliebig abnehmenden Incremente, d. h. eine willkürliche Grösse ε, geometrisch die trigonometrische Tangente des Winkels zwischen der Geraden M_1MT und der Abscissenachse. Mittelst der vorigen Gleichung kann man ε aus $\frac{\beta}{\alpha}$ oder umgekehrt dieses Verhältniss aus ε herleiten, nämlich

$$\varepsilon = -\frac{1 + p^2 + \frac{\beta}{\alpha}pq}{\frac{\beta}{\alpha}(1 + q^2) + pq}, \quad \frac{\beta}{\alpha} = -\frac{1 + p^2 + pq\varepsilon}{(1 + q^2)\varepsilon + pq}.$$

Der Normalschnitt RPS hat in P den Krümmungshalbmesser

$$\varrho = \frac{1 + \varepsilon^2 + (p + q\varepsilon)^2}{r + 2s\varepsilon + t\varepsilon^2}\sqrt{p^2 + q^2 + 1}.$$

Wählt man ε so, dass es der quadratischen Gleichung genügt

$$[(1 + q^2)s - pqt]\varepsilon^2 + [(1 + q^2)r - (1 + p^2)t]\varepsilon = (1 + p^2)s - pqr,$$

so erreicht ϱ seinen grössten oder kleinsten Werth. Statt diese

Gleichung aufzulösen und die den Wurzeln $\varepsilon = \varepsilon_1$ und $\varepsilon = \varepsilon_2$ entsprechenden Werthe $\varrho = \varrho_1$ und $\varrho = \varrho_2$ nach der vorigen Formel zu berechnen, kann man die Hauptkrümmungshalbmesser ϱ_1 und ϱ_2 direct bestimmen; wird nämlich zur Abkürzung

$$n = \sqrt{1 + p^2 + q^2}$$

gesetzt, so sind ϱ_1 und ϱ_2 die Wurzeln der Gleichung

$$(rt - s^2)\,\varrho^2 - [(1 + q^2)\,r - 2pqs + (1 + p^2)\,t]\,n\varrho + n^4 = 0,$$

mithin ist auch

$$\varrho_1 + \varrho_2 = \frac{(1 + q^2)\,r - 2pqs + (1 + p^2)\,t}{rt - s^2}\,n,$$

$$\varrho_1\varrho_2 = \frac{n^4}{rt - s^2}.$$

Die Ebenen der beiden Hauptnormalschnitte stehen auf einander senkrecht.

Für irgend einen Normalschnitt, der mit dem ersten Hauptnormalschnitte den Winkel θ bildet, bestimmt sich der Krümmungshalbmesser mittelst der Gleichung

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\cos^2\theta}{\varrho_1} + \frac{\sin^2\theta}{\varrho_2},$$

oder

$$\varrho = \frac{\varrho_1\varrho_2}{\varrho_1 \sin^2\theta + \varrho_2 \cos^2\theta} = \frac{2\varrho_1\varrho_2}{\varrho_1 + \varrho_2 - (\varrho_1 - \varrho_2)\cos 2\theta}.$$

In dem speciellen Falle, wo ϱ_1 und ϱ_2 gleich und von gleichem Vorzeichen sind, erhalten alle ϱ denselben Werth, hängen also nicht mehr von ε ab. Da die allgemeine Formel für ϱ geschrieben werden kann

$$\varrho = \frac{1 + p^2}{r} \cdot \frac{1 + \dfrac{2pq}{1 + p^2}\,\varepsilon + \dfrac{1 + q^2}{1 + p^2}\,\varepsilon^2}{1 + \dfrac{2s}{r}\,\varepsilon + \dfrac{t}{r}\,\varepsilon^2}\,n,$$

so tritt der obige Fall nur dann ein, wenn gleichzeitig

$$\frac{pq}{1 + p^2} = \frac{s}{r}, \quad \frac{1 + q^2}{1 + p^2} = \frac{t}{r}$$

ist, oder

$$pqr = (1 + p^2)\,s, \quad (1 + q^2)\,r = (1 + p^2)\,t,$$

wofür symmetrisch geschrieben werden kann

$$\frac{r}{1 + p^2} = \frac{s}{pq} = \frac{t}{1 + q^2}.$$

In Verbindung mit der Gleichung der Fläche bestimmen diese Relationen die sogenannten Kreispunkte der Fläche.

Die Hauptkrümmungshalbmesser ϱ_1 und ϱ_2 werden gleich und von entgegengesetztem Zeichen, sobald

$$(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t = 0$$

ist. In Verbindung mit der Gleichung der Fläche bestimmt diese Relation diejenigen Flächenpunkte, welchen die genannte Eigenschaft von ϱ_1 und ϱ_2 zukommt.

Im Falle $rt - s^2 = 0$ ist, wird $\frac{1}{\varrho} = 0$, d. h. der eine Hauptnormalschnitt geht in eine Gerade über. Flächen dieser Art werden von einer Ebene nicht in einem Punkte, sondern längs einer Geraden berührt.

§ 23.

Beispiele.

1. Das elliptische Paraboloid. Die Gleichung der Fläche sei

$$z = \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b}$$

und darin $a > b$. Als Gleichung der Berührungsebene findet man

$$\frac{x}{az}\xi + \frac{y}{bz}\eta - \frac{1}{z}\zeta = 1,$$

wonach die Spuren dieser Ebene leicht zu construiren sind. Die Gleichungen der Normale sind

$$\xi - x = -\frac{x}{a}(\zeta - z), \quad \eta - y = -\frac{y}{b}(\zeta - z);$$

setzt man

$$n = \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}},$$

so bestimmen sich die Richtungswinkel der Normale durch die Formeln

$$\cos\nu_x = -\frac{x}{an}, \quad \cos\nu_y = -\frac{y}{bn}, \quad \cos\nu_z = +\frac{1}{n}.$$

Die beiden Hauptkrümmungshalbmesser ϱ_1 und ϱ_2 sind die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$\varrho^2 - \left(a + b + \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b}\right)n\varrho + abn^4 = 0;$$

setzt man zur Abkürzung $\frac{1}{2}(a+b) = c$, so erhält man

$$\varrho_1 = n\{c + z + \sqrt{(c+z)^2 - abn^2}\},$$
$$\varrho_2 = n\{c + z - \sqrt{(c+z)^2 - abn^2}\}.$$

Beide Krümmungshalbmesser sind positiv, mithin sind es auch die Krümmungshalbmesser aller Normalschnitte.

Zur Bestimmung der Kreispunkte dienen die Gleichungen

$$xy = 0, \quad ay^2 - bx^2 = ab(a-b);$$

die erste Gleichung giebt entweder $x = 0$ oder $y = 0$, wobei der letzte Werth wegen $a > b$ unbrauchbar ist; die Coordinaten der Kreispunkte sind folglich

$$x = 0, \quad y = +\sqrt{b(a-b)}, \quad z = \tfrac{1}{2}(a-b),$$
$$x = 0, \quad y = -\sqrt{b(a-b)}, \quad z = \tfrac{1}{2}(a-b).$$

2. **Das hyperbolische Paraboloid.** Die Gleichung der Fläche sei

$$z = \frac{x^2}{2a} - \frac{y^2}{2b};$$

als Gleichung der Berührungsebene findet sich dann

$$\frac{x}{az}\xi - \frac{y}{bz}\eta - \frac{1}{z}\zeta = 1.$$

Um zu entscheiden, ob diese Ebene ausser dem Punkte xyz noch andere Punkte mit dem hyperbolischen Paraboloide gemein hat, verbinde man die Gleichung der Berührungsebene mit der Gleichung

$$\zeta = \frac{\xi^2}{2a} - \frac{\eta^2}{2b};$$

die Elimination von ζ giebt

$$a(\eta - y)^2 - b(\xi - x)^2 = 0,$$

und da diese Gleichung zwei Gerade ausdrückt, so schneidet die Berührungsebene das Paraboloid in zwei Geraden, deren Horizontalprojectionen parallel zur Horizontalspur der Fläche sind.

Als Gleichungen der Normale erhält man

$$\xi - x = -\frac{x}{a}(\zeta - z), \quad \eta - y = +\frac{y}{b}(\zeta - z);$$

wird ferner zur Abkürzung

$$n = \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}$$

gesetzt, so sind die Cosinus der Richtungswinkel der Normale

$$\cos\nu_x = -\frac{x}{an}, \quad \cos\nu_y = +\frac{y}{bn}, \quad \cos\nu_z = \frac{1}{n}.$$

Mit Benutzung des abkürzenden Zeichens $c = \frac{1}{2}(a - b)$ erhält man für die Hauptkrümmungshalbmesser

$$\varrho_1 = n\{c + z + \sqrt{(c+z)^2 + abn^2}\},$$
$$\varrho_2 = n\{c + z - \sqrt{(c+z)^2 + abn^2}\}.$$

Dabei ist ϱ_1 positiv, ϱ_2 negativ; die Krümmungshalbmesser aller um einem Punkt herum liegenden Normalschnitte erstrecken sich demgemäss theils nach der einen, theils nach der andern entgegengesetzten Richtung.

Das hyperbolische Paraboloid besitzt keine Kreispunkte, wohl aber solche Punkte, in denen die Hauptkrümmungshalbmesser gleich und entgegengesetzt sind. Die Bedingung $\varrho_1 + \varrho_2 = 0$ giebt nämlich $z = -c$; die erwähnten Punkte liegen demnach auf einer horizontalen Ebene, welche die Fläche in einer Hyperbel schneidet.

3. Das dreiachsige Ellipsoid. Statt der gewöhnlichen Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

schreiben wir kürzer

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1;$$

die Werthe der fünf erforderlichen Differentialquotienten sind dann

$$p = -\frac{Ax}{Cz}, \quad q = -\frac{By}{Cz},$$

$$r = -\frac{A(Ax^2 + Cz^2)}{C^2z^3}, \quad s = -\frac{ABxy}{C^2z^3}, \quad t = -\frac{B(By^2 + Cz^2)}{C^2z^3}.$$

Die Gleichung der Berührungsebene wird

$$Ax\xi + By\eta + Cz\zeta = 1,$$

woraus folgt, dass diese Ebene auf den Coordinatenachsen die Strecken

$$\frac{1}{Ax} = \frac{a^2}{x}, \quad \frac{1}{By} = \frac{b^2}{y}, \quad \frac{1}{Cz} = \frac{c^2}{z}$$

abschneidet, deren Construction sehr einfach ist.

Die Normale bestimmt sich durch folgende Gleichungen

$$\frac{\xi - x}{Ax} = \frac{\eta - y}{By} = \frac{\zeta - z}{Cz};$$

ihre Richtungswinkel findet man, wenn zur Abkürzung

$$N = \sqrt{A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2}$$

gesetzt wird, mittelst der Formeln

$$\cos\nu_x = \frac{Ax}{N}, \quad \cos\nu_y = \frac{By}{N}, \quad \cos\nu_z = \frac{Cz}{N}.$$

Ferner ergiebt sich aus den obigen Werthen von p, q, r, s, t

$$(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t$$
$$= -\frac{A^2(B+C)x^2 + B^2(C+A)y^2 + C^2(A+B)z^2}{C^3z^3}$$
$$= -\frac{AB + CN^2 - (A-C)(B-C)Cz^2}{C^3z^3};$$
$$rt - s^2 = \frac{AB}{C^3z^4};$$

für die Hauptkrümmungshalbmesser ist also

$$\varrho_1 + \varrho_2 = -\frac{A^2(B+C)x^2 + B^2(C+A)y^2 + C^2(A+B)z^2}{ABC} N,$$
$$\varrho_1\varrho_2 = \frac{N^4}{ABC}.$$

Das positive Vorzeichen von $\varrho_1\varrho_2$ beweist, dass beide Factoren gleiche Vorzeichen haben; demzufolge liegen die Krümmungshalbmesser aller durch den Punkt xyz gehenden Normalschnitte nach derselben Seite hin.

Unter der Voraussetzung $a > b > c$ also $A < B < C$ besitzt die Fläche vier Kreispunkte, deren Coordinaten aus den Formeln

$$x = \pm a\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}, \quad y = 0, \quad z = \pm c\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}$$

durch Combinationen der Vorzeichen erhalten werden.

4. Das einfache Hyperboloid. Wie im vorigen Beispiele mögen A, B, C die reciproken Werthe der Halbachsenquadrate bezeichnen; die Gleichung der Fläche ist dann

$$Ax^2 + By^2 - Cz^2 = 1,$$

und die Gleichung der Berührungsebene im Punkte xyz

$$Ax(\xi - x) + By(\eta - y) - Cz(\zeta - z) = 0,$$

oder

$$Ax\xi + By\eta - Cz\zeta = 1.$$

Um zu entscheiden, ob diese Ebene ausser dem Berührungspunkte noch andere Punkte mit der Fläche gemein hat, verbinde man die vorstehende Gleichung mit der Gleichung

$$A\xi^2 + B\eta^2 - C\zeta^2 = 1,$$

was am einfachsten zu machen ist, wenn man $\xi - x = \xi_1$, $\eta - y = \eta_1$, $\zeta - z = \zeta_1$ setzt, wodurch die erwähnten zwei Gleichungen übergehen in

$$A x\xi_1 + B y\eta_1 - C z\zeta_1 = 0,$$
$$A\xi_1^2 + B\eta_1^2 - C\zeta_1^2 = 0.$$

Durch Elimination von ζ_1 ergiebt sich

$$A(Cz^2 - Ax^2)\xi_1^2 + B(Cz^2 - By^2)\eta_1^2 - 2ABxy\xi_1\eta_1 = 0,$$

$$\frac{\eta_1}{\xi_1} = \frac{ABxy \pm \sqrt{ABC}\cdot z}{B(Cz^2 - By^2)},$$

oder vermöge der Werthe von ξ_1, η_1, A, B, C, z

$$\eta - y = \frac{xy \pm \sqrt{b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2}}{x^2 - a^2}(\xi - x).$$

Hieraus folgt, dass die Fläche von ihrer Berührungsebene in zwei Geraden geschnitten wird, deren Horizontalprojectionen die Horizontalspur der Fläche (die sogenannte Kehlellipse) berühren.

Die Normale bestimmt sich durch die Gleichungen

$$\frac{\xi - x}{Ax} = \frac{\eta - y}{By} = -\frac{\zeta - z}{Cz};$$

für die Richtungswinkel ν_x, ν_y, ν_z gelten die Formeln

$$\cos\nu_x = \frac{Ax}{N}, \quad \cos\nu_y = \frac{By}{N}, \quad \cos\nu_z = -\frac{Cz}{N},$$

wo N die nämliche Bedeutung hat, wie in Aufgabe 3.

Ebenso findet man die Werthe von $\varrho_1 + \varrho_2$ und $\varrho_1\varrho_2$ dadurch, dass man in den Formeln des dritten Beispiels $-C$ an die Stelle von C treten lässt. Dabei wird $\varrho_1\varrho_2$ negativ, mithin liegen die Hauptkrümmungshalbmesser nach entgegengesetzten Richtungen.

Auf dem einfachen Hyperboloide existiren keine Kreispunkte, wohl aber können solche Punkte vorkommen, in denen ϱ_1 und ϱ_2 entgegengesetzt gleich sind. Die hierzu nöthige Bedingung ist

$$A^2(B - C)x^2 + B^2(A - C)y^2 + C^2(A + B)z^2 = 0$$

oder wenn die Werthe von z, A, B, C, eingeführt und die Abkürzungen

$$a_1 = a\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2 + c^2}}, \quad b_1 = b\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{b^2 + c^2}}$$

benutzt werden,

$$\left(\frac{x}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{y}{b_1}\right)^2 = 1.$$

Jene Punkte sind hiernach die Durchschnitte des Hyperboloids mit einer concentrischen Kugelfläche, deren Radius $= \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$

ist; sie werden imaginär, wenn gleichzeitig $a_1 < a$ und $b_1 < b$, d. h. $a < c$ und zugleich $b < c$ ist.

5. Das getheilte Hyperboloid. Bezeichnen A, B, C die reciproken Werthe der Halbachsenquadrate, so ist die Gleichung der Fläche

$$-Ax^2 - By^2 + Cz^2 = 1,$$

man erhält demnach alle nöthigen Formeln, wenn man in den Formeln des dritten Beispiels $-A$ für A und gleichzeitig $-B$ für B setzt.

Die Hauptkrümmungsradien ϱ_1 und ϱ_2 haben gleiche Vorzeichen, mithin liegen die Krümmungshalbmesser aller Normalschnitte nach einerlei Richtung.

Die Fläche besitzt vier Kreispunkte, deren Coordinaten (für $a > b$) durch folgende Formeln bestimmt werden

$$x = 0, \quad y = \pm b\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 + c^2}}, \quad z = \pm c\sqrt{\frac{a^2 + c^2}{b^2 + c^2}},$$

wobei alle Combinationen der Vorzeichen zu bilden sind.

6. Die Flächen zweiten Grades. Aus der Untersuchung der centrischen Flächen zweiten Grades geht hervor, dass die Normale eines Flächenpunktes nur dann mit dem Radiusvector desselben Punktes zusammenfällt, wenn dieser Punkt zugleich auf einer der Hauptachsen liegt, d. h. wenn er ein Scheitel der Fläche ist. Diese Bemerkung kann dazu dienen, um die Scheitel und Haupthalbachsen einer centrischen Fläche zu bestimmen, deren Gleichung in der allgemeineren Form

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Ezx + 2Fxy = K$$

gegeben ist. Setzt man nämlich zur Abkürzung

$$\begin{aligned} Ax + Fy + Ez &= u, \\ By + Dz + Fx &= v, \\ Cz + Ex + Dy &= w, \end{aligned}$$

so erhält man

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{u}{w}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{v}{w};$$

hieraus bestimmen sich die Winkel ν_x, ν_y, ν_z und wenn diese identisch mit den Winkeln (r, x), (r, y), (r, z) sein sollen $(r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$, so müssen die Bedingungen

$$\frac{v}{u} = \frac{y}{x}, \quad \frac{w}{u} = \frac{z}{x}$$

erfüllt sein. Dafür kann man schreiben

$$\frac{u}{x} = \frac{v}{y} = \frac{w}{z} = Q,$$

wobei Q den unbekannten gemeinschaftlichen Werth der drei Quotienten bezeichnet; es ist also

$$Ax + Fy + Ez = Qx,$$
$$By + Dz + Fx = Qy,$$
$$Cz + Ex + Dy = Qz.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen der Reihe nach mit x, y, z und addirt, so ergiebt sich

$$\alpha) \qquad K = Q(x^2 + y^2 + z^2), \quad r = \sqrt{\frac{K}{Q}}.$$

Es sei ferner zur Abkürzung

$$A - \frac{EF}{D} = L, \quad B - \frac{FD}{E} = M, \quad C - \frac{DE}{F} = N,$$

$$\frac{x}{D} + \frac{y}{E} + \frac{z}{F} = S,$$

wo L, M, N bekannt sind, dagegen S unbekannt ist; die vorigen drei Bedingungsgleichungen lassen sich dann folgendermassen darstellen

$$(Q - L)x = EFS, \quad (Q - M)y = FDS, \quad (Q - N)z = DES,$$

oder

$$\beta) \qquad x = \frac{EFS}{Q - L}, \quad y = \frac{FDS}{Q - M}, \quad z = \frac{DES}{Q - N}.$$

Berechnet man hieraus $x^2 + y^2 + z^2 = r^2 = \frac{K}{Q}$, so erhält man

$$\gamma) \qquad S^2 = \frac{K}{Q\left\{\left(\frac{EF}{Q - L}\right)^2 + \left(\frac{FD}{Q - M}\right)^2 + \left(\frac{DE}{Q - N}\right)^2\right\}};$$

dividirt man dagegen die vorigen drei Gleichungen mit D, E, F und addirt, so kommt links wieder S zum Vorschein und es bleibt

$$\delta) \qquad 1 = \frac{EF}{D} \cdot \frac{1}{Q - L} + \frac{FD}{E} \cdot \frac{1}{Q - M} + \frac{DE}{F} \cdot \frac{1}{Q - N}.$$

Die vorstehende cubische Gleichung bestimmt die Werthe von Q; nachher giebt die Gleichung γ) die entsprechenden Werthe von S; aus β) erhält man die Coordinaten der Scheitel und aus α) die Radienvectoren der Scheitel, d. h. die Halbachsen der Fläche.

Um die Anzahl der reellen Wurzeln von δ) zu ermitteln, betrachte man die analoge Gleichung

$$\eta = \frac{a}{\xi - \alpha} + \frac{b}{\xi - \beta} + \frac{c}{\xi - \gamma}$$

als Gleichung einer Curve in den rechtwinkligen Coordinaten ξ und η. Die Werthe

$$\xi = -\infty, \quad \alpha - 0, \quad \alpha + 0, \quad \beta - 0, \quad \beta + 0, \quad \gamma - 0, \quad \gamma + 0, \quad +\infty$$

zeigen, dass die Curve aus vier getrennten Zweigen besteht, von denen der erste und letzte die ξ-Achse zur Asymptote haben, dass η an den Stellen $\xi = \alpha$, β, γ von $-\infty$ nach $+\infty$ oder umgekehrt überspringt, dass also an den genannten Stellen Asymptoten parallel zur η-Achse vorhanden sind. Eine in der Entfernung $\eta = 1$ parallel zur ξ-Achse liegende Gerade schneidet daher jedenfalls die Curve dreimal, mithin besitzt die Gleichung

$$1 = \frac{a}{\xi - \alpha} + \frac{b}{\xi - \beta} + \frac{c}{\xi - \gamma}$$

immer drei reelle Wurzeln. Ebenso hat die Gleichung δ) immer drei reelle Wurzeln, denen aber, K als positiv vorausgesetzt, nur dann reelle S, x, y, z entsprechen, wenn sie zugleich positiv sind. Hieraus folgt, dass die Fläche ein Ellipsoid, ein einfaches oder ein getheiltes Hyperboloid ist, je nachdem die Gleichung δ) drei, zwei oder eine positive Wurzel besitzt.

7. Eine Fläche habe die folgende, geometrisch leicht zu interpretirende Gleichung

$$xyz = c^3;$$

die Gleichung der Berührungsebene ist dann

$$\frac{\xi - x}{x} + \frac{\eta - y}{y} + \frac{\zeta - z}{z} = 0,$$

oder

$$\frac{\xi}{3x} + \frac{\eta}{3y} + \frac{\zeta}{3z} = 1.$$

Diese Ebene schneidet ausserdem die Fläche in einer Curve, für welche die Gleichungen

$$\frac{\xi}{x} + \frac{\eta}{y} + \frac{\zeta}{z} = 3 \text{ und } \xi\eta\zeta = c^3$$

zusammen bestehen; die Horizontalprojection des Durchschnittes hat demnach zur Gleichung

$$\left(3 - \frac{\xi}{x} - \frac{\eta}{y}\right)\xi\eta = \frac{c^2}{z}.$$

Die Gleichungen der Normale sind

$$x(\xi - x) = y(\eta - y) = z(\zeta - z);$$

die Richtungswinkel der Normale bestimmen sich durch die Formeln

$$\frac{1}{N} = \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}},$$

$$\cos\nu_x = \frac{N}{x}, \quad \cos\nu_y = \frac{N}{y}, \quad \cos\nu_z = \frac{N}{z}.$$

Ferner hat man

$$\varrho_1 + \varrho_2 = \tfrac{2}{3}\cdot\frac{x^2 + y^2 + z^2}{N}, \quad \varrho_1\varrho_2 = \frac{c^6}{3N^4};$$

an den Stellen $x^2 = y^2 = z^2 = c^2$ sind Kreispunkte vorhanden.

8. Die Gleichung einer Fläche sei

$$z = \tfrac{1}{2}cl\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right),$$

oder bequemer

$$Cz = \tfrac{1}{2}l(Ax^2 + By^2);$$

die partiellen Differentialquotienten p, q, r, s, t sind dann

$$p = \frac{Ax}{C(Ax^2 + By^2)}, \quad q = \frac{By}{C(Ax^2 + By^2)},$$

$$r = \frac{A(By^2 - Ax^2)}{C(Ax^2 + By^2)^2}, \quad s = -\frac{2ABxy}{C(Ax^2 + By^2)^2}, \quad t = \frac{B(Ax^2 - By^2)}{C(Ax^2 + By^2)^2}.$$

Hieraus findet man als Gleichung der Berührungsebene

$$Ax\xi + By\eta - C(Ax^2 + By^2)\zeta = (1 - Cz)(Ax^2 + By^2),$$

als Gleichungen der Normale

$$\xi - x = -\frac{Ax(\zeta - z)}{C(Ax^2 + By^2)}, \quad \eta - y = -\frac{By(\zeta - z)}{C(Ax^2 + By^2)},$$

und für die Richtungswinkel der Normale, wenn zur Abkürzung

$$N = \sqrt{A^2x^2 + B^2y^2 + C^2(Ax^2 + By^2)^2}$$

gesetzt wird,

$$\cos\nu_x = -\frac{Ax}{N}, \quad \cos\nu_y = -\frac{By}{N}, \quad \cos\nu_z = -\frac{C(Ax^2 + By^2)}{N}.$$

Ferner ist

$$\varrho_1 + \varrho_2 = -\frac{AB - (A - B)C^2(Ax^2 - By^2)}{ABC^2(Ax^2 + By^2)}N,$$

$$\varrho_1\varrho_2 = -\frac{N^4}{ABC^2(Ax^2 + By^2)^2}.$$

Hieraus folgt, dass der Durchschnitt der Fläche und des Cylinders

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2=\frac{c^2}{b^2-a^2}$$

alle diejenigen Punkte enthält, deren Hauptkrümmungsradien gleich und entgegengesetzt sind.

9. Das Kettenconoid. In der Verticalebene xz denke man sich die Kettenlinie construirt, deren Gleichung ist

$$z=c\,l\left(\frac{u+\sqrt{u^2-c^2}}{c}\right)$$

und lasse diese Curve um die z-Achse rotiren; die entstehende Umdrehungsfläche hat dann zur Gleichung

$$z=c\,l\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2+y^2-c^2}}{c}\right),$$

woraus die Werthe folgen

$$p=\frac{cx}{u\sqrt{u^2-c^2}},\quad q=\frac{cy}{u\sqrt{u^2-c^2}},$$

$$r=-\frac{c(x^4-y^4+c^2y^2)}{u^3\sqrt{(u^2-c^2)^3}},\quad t=+\frac{c(x^4-y^4-c^2x^2)}{u^3\sqrt{(u^2-c^2)^3}},$$

$$s=-\frac{cxy(2x^2+2y^2-c^2)}{u^3\sqrt{(u^2-c^2)^3}}.$$

Die Berührungsebene hat zur Gleichung

$$cx(\xi-x)+cy(\eta-y)-u\sqrt{u^2-c^2}(\zeta-z)=0$$

und schneidet die Fläche in einer transcendenten Curve. Für die Normale gelten die Gleichungen

$$\xi-x=-\frac{cx(\zeta-z)}{u\sqrt{u^2-c^2}},\quad \eta-y=-\frac{cy(\zeta-z)}{u\sqrt{u^2-c^2}};$$

ferner ist

$$\cos\nu_x=-\frac{cx}{u^2},\quad \cos\nu_y=-\frac{cy}{u^2},\quad \cos\nu_z=+\frac{\sqrt{u^2-c^2}}{u}.$$

Endlich hat man für alle x, y, z

$$\varrho_1+\varrho_2=0,$$

mithin kommt der Fläche die bemerkenswerthe Eigenschaft zu, dass in jedem ihrer Punkte die beiden Hauptkrümmungsradien gleich und entgegengesetzt sind.

10. Die Schraubenfläche. Aus der Gleichung dieser Fläche nämlich

$$\frac{y}{x} = tan\frac{z}{c}$$

folgen die Werthe

$$p = -\frac{cy}{x^2 + y^2}, \quad q = +\frac{cx}{x^2 + y^2},$$

$$r = \frac{2cxy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad s = -\frac{c(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \quad t = -\frac{2cxy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Die Berührungsebene hat die Gleichung

$$cy\xi - cx\eta + (x^2 + y^2)\zeta = (x^2 + y^2)z;$$

für die Normale gelten die Gleichungen

$$\xi - x = \frac{cy}{x^2 + y^2}(\zeta - z), \quad \eta - y = -\frac{cx}{x^2 + y^2}(\zeta - z),$$

und die Cosinus der Richtungswinkel der Normale sind

$$cos\,\nu_x = \frac{cy}{\sqrt{(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + c^2)}}, \quad cos\,\nu_y = -\frac{cx}{\sqrt{(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + c^2)}},$$

$$cos\,\nu_z = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + c^2}}.$$

Endlich ist allgemein

$$\varrho_1 + \varrho_2 = 0,$$

die Schraubenfläche besitzt also rücksichtlich der Hauptkrümmungshalbmesser die nämliche Eigenschaft wie das Kettenconoid.

§ 24.

Vermischte Aufgaben über Flächen.

I. Isokline Normalen. Eine im Punkte xyz auf einer Fläche errichtete Normale schneidet die Horizontalebene xy unter einem Winkel $\nu = \frac{1}{2}\pi - \nu_z$ und es ist daher

$$cot^2\nu = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2.$$

Von dem Punkte xyz ausgehend, kann man auf der Fläche noch unendlich viel weitere Punkte finden, deren Normalen gleichfalls unter dem Winkel ν gegen den Horizont geneigt sind; derartige Normalen mögen isokline Normalen heissen.

Setzt man in der vorigen Formel ν einer Constanten γ gleich und nimmt die Gleichung der Fläche hinzu, so hat man zwei Bedingungen, wodurch diejenige Curve bestimmt wird, in welcher die Fläche von den stetig aufeinander folgenden isoklinen Normalen geschnitten wird. Diese Curve heisse kurz die Curve der isoklinen Normalen.

1. Das elliptische Paraboloid. Die beiden vorhin erwähnten Bedingungen sind hier

$$z = \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b},$$

$$\cot^2 \gamma = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

Aus der letzten Gleichung geht hervor, dass die Curve der isoklinen Normalen eine elliptische Horizontalprojection besitzt, dass sie mithin als Durchschnitt des Paraboloids und eines verticalen elliptischen Cylinders betrachtet werden kann, dessen Halbachsen sind

$$a' = a \tan \gamma, \quad b' = b \tan \gamma.$$

Die Horizontalprojection irgend einer Normale des Paraboloids hat die Gleichung

$$\frac{x}{a}(\xi - x) = \frac{b}{y}(\eta - y);$$

soll diese Normale zu den vorigen isoklinen Normalen gehören, so muss noch sein

$$\left(\frac{x}{a'}\right)^2 + \left(\frac{y}{b'}\right)^2 = 1,$$

welcher Bedingung durch $x = a' \cos \omega$, $y = b' \sin \omega$ genügt wird. Die Horizontalprojection einer isoklinen Normale ist demnach

$$\frac{a\,\xi}{a' \cos \omega} - \frac{b\,\eta}{b' \sin \omega} = a - b;$$

diese Gerade schneidet auf den Coordinatenachsen die Strecken ab

$$\frac{(a-b)\,a'}{a} \cos \omega = (a-b) \tan \gamma \cdot \cos \omega,$$

$$-\frac{(a-b)\,b'}{b} \sin \omega = -(a-b) \tan \gamma \cdot \sin \omega,$$

d. h. die Horizontalprojectionen aller isoklinen Normalen liegen so, dass die zwischen die Coordinatenachsen fallenden Strecken derselben die constante Länge $(a-b) \tan \gamma$ besitzen. Nach dieser

Bemerkung sind die Horizontal- und Verticalprojectionen einer Schaar isokliner Normalen leicht zu construiren.

Für das hyperbolische Paraboloid gelten ähnliche Sätze.

2. Das Ellipsoid. Als Bedingungen hat man

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

$$cot^2\gamma=\frac{c^4}{z^2}\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}\right),$$

und hieraus folgt durch Elimination von z, dass die Curve der isoklinen Normalen eine aus den Halbachsen

$$a'=\frac{a^2}{\sqrt{a^2+c^2\,tan^2\gamma}},\quad b'=\frac{b^2}{\sqrt{b^2+c^2\,tan^2\gamma}}$$

construirte Ellipse zur Horizontalprojection hat.

Die Horizontalprojection irgend einer unter dem Winkel γ gegen die xy-Ebene geneigten Normale hat die Gleichung

$$\frac{a^2}{x}(\xi-x)=\frac{b^2}{y}(\eta-y),$$

wobei x und y an die Bedingung

$$\left(\frac{x}{a'}\right)^2+\left(\frac{y}{b'}\right)^2=1$$

gebunden sind. Um letztere zu erfüllen, setze man $x=a'\cos\omega$, $y=b'\sin\omega$; die vorige Gleichung wird dann

$$a^2b'\,\xi\,\sin\omega-b^2a'\,\eta\,\cos\omega=(a^2-b^2)\,a'b'\cos\omega\,\sin\omega.$$

Zu derselben Gleichung gelangt man, sobald es sich darum handelt, durch einen Peripheriepunkt, der aus den Halbachsen

$$a_1=\frac{a^2}{a'}=\sqrt{a^2+c^2\,tan^2\gamma},$$

$$b_1=\frac{b^2}{b'}=\sqrt{b^2+c^2\,tan^2\gamma}$$

construirten Ellipse eine Normale zu eben dieser Ellipse zu ziehen; die Horizontalprojectionen aller unter dem Winkel γ gegen den Horizont geneigten Normalen des Ellipsoides sind daher selbst wieder Normalen zu der aus den Halbachsen a_1 und b_1 construirten Ellipse, welche confocal ist mit der Horizontalspur des Ellipsoides.

Für die beiden Hyperboloide gelten ähnliche Sätze. Bei dem einfachen Hyperboloide ist der specielle Fall bemerkenswerth, dass die Horizontalprojection der Curve isokliner Normalen zu einem Kreise werden kann; für

$$\tan\gamma = \frac{ab}{c\sqrt{a^2+b^2}}$$

ergiebt sich nämlich

$$a' = b' = \sqrt{a^2+b^2}.$$

II. Fusspunktflächen. Lässt man von einem festen Punkte C Senkrechte auf alle Berührungsebenen einer gegebenen Fläche herab, so bilden die Fusspunkte P jener Perpendikel eine neue Fläche, deren Gleichung auf folgende Weise gefunden wird. Es seien g, h, k die rechtwinkligen Coordinaten des Poles C; x, y, z die Coordinaten eines Punktes der gegebenen Fläche; u, v, w die Coordinaten des entsprechenden Fusspunktes P, so gelten für letztere die Gleichungen

$$\frac{\partial z}{\partial x}(u-x) + \frac{\partial z}{\partial y}(v-y) - (w-z) = 0,$$

$$u - g = -\frac{\partial z}{\partial x}(w-k), \quad v - h = -\frac{\partial z}{\partial y}(w-k).$$

Unter Zuhülfenahme der zwischen x, y, z bestehenden Flächengleichung lassen sich x, y, z eliminiren; die übrigbleibende Gleichung zwischen u, v, w ist die Gleichung der Fusspunktfläche.

3. Das elliptische Paraboloid. Von der Gleichung

$$z = \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b}$$

ausgehend, erhält man, wenn der Scheitel der Fläche zum Pol genommen wird,

$$\frac{x}{a}u + \frac{y}{b}v - w = z,$$

$$u = -\frac{x}{a}w, \quad v = -\frac{y}{b}w.$$

Diese drei Gleichungen geben

$$x = -a\frac{u}{w}, \quad y = -b\frac{v}{w}, \quad z = -\frac{u^2+v^2+w^2}{w},$$

und wenn diese Werthe in die Gleichung des Paraboloids substituirt werden, so entsteht

$$(u^2+v^2+w^2)w = -\tfrac{1}{2}(au^2+bv^2).$$

Durch Vertauschung von b mit $-b$ erhält man daraus die Gleichung der Fusspunktfläche des hyperbolischen Paraboloides.

4. Das Ellipsoid. Die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

liefert, wenn der Mittelpunkt der Fläche zum Pol genommen wird,

$$\frac{x}{a^2}u+\frac{y}{b^2}v+\frac{z}{c^2}w=1,$$

$$\frac{a^2}{x}u=\frac{b^2}{y}v=\frac{c^2}{z}w;$$

es ist mithin

$$x=\frac{a^2u}{u^2+v^2+w^2},\quad y=\frac{b^2v}{u^2+v^2+w^2},\quad z=\frac{c^2w}{u^2+v^2+w^2}$$

und zufolge der Gleichung des Ellipsoides

$$(u^2+v^2+w^2)^2=a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2.$$

Für die beiden Hyperboloide gelten ganz ähnliche Gleichungen der Fusspunktflächen.

5. Die gegebene Fläche sei durch die Gleichung bestimmt

$$xyz=c^3$$

und der Coordinatenanfang werde zum Pol genommen; die Gleichung der Fusspunktfläche ist dann

$$(u^2+v^2+w^2)^3=27\,c^3uvw.$$

Capitel VIII.

Einhüllende Curven und Flächen.

§ 25.

Einhüllende Curven.

Die Gleichung einer ebenen Curve enthalte ausser den Coordinaten x und y noch eine willkürliche Constante p (einen sogenannten Parameter), sie sei demgemäss

$$F(x, y, p) = 0.$$

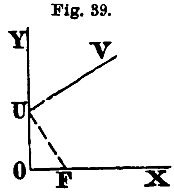
Lässt man p sich stetig ändern, so entsteht eine Schaar von Curven derselben Art, die sich aber in ihren Dimensionen, Gestalten oder Lagen von einander unterscheiden. Dabei kann es geschehen, dass jede solche Curve die nächste schneidet, und dann bilden die successiven Durchschnitte eine neue Curve, die sogenannte Einhüllende jener Schaar. Die Gleichung der Einhüllenden ergiebt sich dadurch, dass man aus den beiden Gleichungen

$$F(x, y, p) = 0, \quad \frac{\partial F(x, y, p)}{\partial p} = 0$$

den veränderlichen Parameter p eliminirt.

Beispiel 1. Ein rechter Winkel bewege sich so, dass der eine Schenkel durch einen festen Punkt geht und der Scheitel an einer festen Geraden hingleitet; man sucht die Einhüllende des anderen Schenkels (Fig. 39).

Fig. 39.



Nimmt man die feste Gerade zur Ordinatenachse, legt zu dieser senkrecht die Abscissenachse durch den festen Punkt F, wählt auf der y-Achse die Strecke $OU = u$ willkürlich und zieht $UV \perp FU$, so ist FUV irgend eine Lage des rechten Winkels; die Gleichung von UV lautet für $OF = a$

$$y = \frac{a}{u}x + u,$$

und darin bedeutet u die willkürliche Constante (vorhin p). Die partielle Differentiation in Beziehung auf u giebt

$$0 = -\frac{a}{u^2}x + 1$$

und durch Elimination von u entsteht

$$y^2 = 4ax.$$

Die Einhüllende ist hiernach eine Parabel (vergl. S. 133, Aufg. 1).

Beispiel 2. Ein rechter Winkel werde so verschoben, dass der eine Schenkel durch einen festen Punkt geht und der Scheitel einen gegebenen Kreis durchläuft; man sucht die Einhüllende des anderen Schenkels.

Der Mittelpunkt des Kreises sei der Coordinatenanfang O, seine Verbindungslinie mit dem festen Punkte F die x-Achse, der Kreisradius $= a$, $OF = c$; die Coordinaten eines beliebigen Punktes auf dem Kreise mögen u und v heissen; die Gleichung des zweiten Winkelschenkels ist dann

$$v(y - v) = (c - u)(x - u),$$

wobei u und v an die Bedingung

$$u^2 + v^2 = a^2$$

gebunden sind. Differenzirt man die Gleichung der vorigen Geraden nach u und beachtet, dass zufolge der letzten Bedingung v abhängig von u und deshalb $\frac{\partial v}{\partial u} = -\frac{u}{v}$ ist, so erhält man

$$(y - 2v)\left(-\frac{u}{v}\right) = -(c + x) + 2u.$$

Endlich giebt die Elimination von u und v aus allen drei Gleichungen

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2);$$

die Einhüllende ist also eine Ellipse oder Hyperbel, je nachdem der feste Punkt innerhalb oder ausserhalb des Kreises liegt (vergl. S. 133, Aufg. 2).

Beispiel 3. Ein rechter Winkel bewegt sich so, dass der eine Schenkel durch den Scheitel einer Parabel geht, während der Scheitel des Winkels auf derselben Parabel fortrückt; man sucht die Einhüllende des anderen Schenkels.

Für den zweiten Schenkel gilt die Gleichung

$$v(y-v) = -u(x-u),$$

wobei u und v an die Bedingung

$$v^2 = 4au$$

gebunden sind. Wegen $\frac{\partial v}{\partial u} = \frac{2a}{v}$ erhält man durch Differentiation der ersten Gleichung

$$(y-2v)\frac{2a}{v} = -x + 2u.$$

Eliminirt man u das eine Mal aus der ersten und zweiten, das andere Mal aus der dritten und zweiten Gleichung, so erhält man

$$16a^2y + 4a(x-4a)v - v^3 = 0,$$
$$4a^2y + 2a(x-4a)v - v^3 = 0;$$

die Differenz beider Gleichungen giebt

$$v = -\frac{6ay}{x-4a},$$

und wenn man diesen Werth in eine der beiden vorhergehenden Gleichungen einsetzt, so gelangt man zu der Gleichung der Einhüllenden, nämlich

$$27ay^2 = (x-4a)^3.$$

Die gesuchte Curve ist demnach eine semicubische Parabel.

Beispiel 4. Ein rechter Winkel bewegt sich so, dass der eine Schenkel durch den Brennpunkt einer gegebenen Parabel geht, während der Scheitel auf derselben Parabel fortrückt; man sucht die Einhüllende des anderen Schenkels.

Die Gleichung des letzteren Scheitels ist

$$v(y-v) = (a-u)(x-u),$$

wobei u und v der Bedingung

$$v^2 = 4au$$

genügen müssen. Durch ein dem Vorigen sehr ähnliches Verfahren erhält man als Gleichung der Einhüllenden

$$27ay^2 = x(x-9a)^2;$$

letztere ist identisch mit der in § 15, Aufg. 7 untersuchten Curve.

Beispiel 5 (Fig. 40). Auf der einen Seite AB eines gegebenen Dreiecks ABC wählt man den Punkt P beliebig, legt durch denselben $PQ \parallel BC$, $PR \parallel AC$ und zieht die Gerade QR; welches ist die Einhüllende aller dieser Geraden?

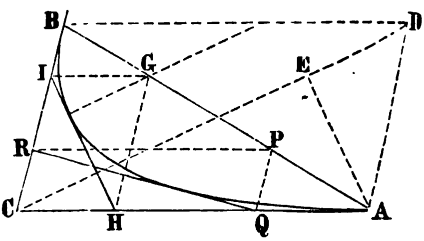
Nimmt man CA und CB als Coordinatenachsen und setzt $CA = a$, $CB = b$, $CQ = u$, $CR = v$, so ist die Gleichung der Geraden QR

$$\frac{x}{u} + \frac{y}{v} = 1,$$

wo u und v der Bedingung

$$\frac{u}{a} + \frac{v}{b} = 1$$

Fig. 40.



genügen müssen. Die Einhüllende bestimmt sich durch die Gleichung

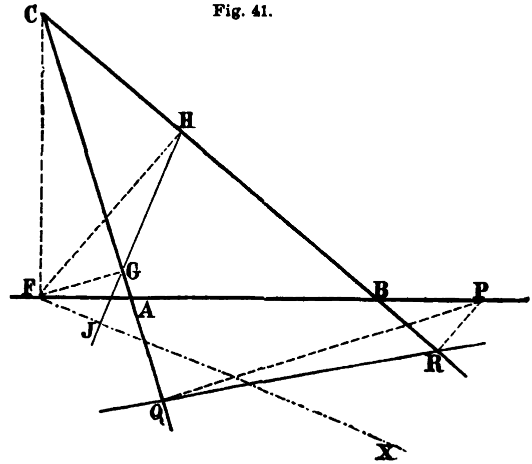
$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) + 1 = 0$$

und ist eine Parabel, welche die Coordinatenachsen in A und B berührt. Um die Achse dieser Parabel zu finden, construire man aus den Seiten CA, CB das Parallelogramm $ACBD$, fälle auf dessen Diagonale CD von A aus die Senkrechte AE und wähle auf AB den Punkt G so, dass

$$AG : BG = CE : DE;$$

dann ist G ein Punkt der Parabelachse und die zu G gehörende Gerade $HI \parallel AE$ die Scheiteltangente.

Fig. 41.



Beispiel 6 (Fig. 41). Es sind drei Gerade gegeben, welche sich in den Punkten A, B, C schneiden; jeder Punkt P der Ge-

raden AB wird auf die beiden übrigen Geraden CA und CB projicirt, wodurch die Punkte Q und R entstehen; man sucht die Einhüllende der Geraden QR.

Um ein bequemes Coordinatensystem zu erhalten, nehme man den Fusspunkt F der Dreieckshöhe CF zum Anfange rechtwinkliger Coordinaten, construire die zugehörige Gerade GH und lege die Abscissenachse FX senkrecht zu GH. Für

$$FJ = c, \quad \angle JFG = \alpha, \quad \angle JFH = \beta$$

erhält man

$$\angle JFA = \alpha + \beta - 90^0,$$

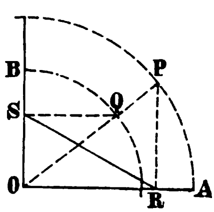
und wenn $FP = r$ gesetzt wird, so ist die Gleichung der veränderlichen Geraden QR

$$cx - r\cos\alpha\cos\beta \cdot y = c^2 + r^2\cos^2\alpha\cos^2\beta.$$

Hieraus ergiebt sich, dass die einhüllende Curve eine Parabel ist, welche F zum Brennpunkte und J zum Scheitel hat.

Beispiel 7 (Fig. 42). Mit den Radien $OA = a$ und $OB = b$ sind zwei concentrische Kreise beschrieben und es sei $OB \perp OA$; irgend eine durch O gelegte Gerade schneidet den ersten Kreis in P, den zweiten in Q; man projicirt ferner P auf OA, Q auf OB, wodurch die Punkte R und S entstehen und zieht die Gerade RS; welches ist die Einhüllende aller dieser Geraden?

Fig. 42.



Für $OR = u$, $OS = v$ hat man als Gleichung von RS

$$\frac{x}{u} + \frac{y}{v} = 1,$$

wobei u und v der Bedingung

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1$$

genügen müssen. Bequemer ist es hier, den Winkel $AOP = \omega$ einzuführen, wodurch $u = a\cos\omega$, $v = b\sin\omega$ wird, und in der nunmehrigen Gleichung von RS nämlich

$$\frac{x}{a\cos\omega} + \frac{y}{b\sin\omega} = 1$$

den Winkel ω als willkürliche Constante zu betrachten. Differenzirt man die Gleichung in Beziehung auf ω und eliminirt nachher ω, so erhält man als Gleichung der Einhüllenden

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Im Falle $b = a$ hat die Linie RS die constante Länge a und es entsteht dann die in § 15, Aufg. 12 betrachtete Curve; im Falle $b < a$ ist die Einhüllende identisch mit der Evolute einer aus den Halbachsen

$$\frac{a^2 b}{a^2 - b^2} \text{ und } \frac{a b^2}{a^2 - b^2}$$

construirten Ellipse.

Beispiel 8. Eine Gerade bewege sich so, dass das Rechteck aus den Strecken, welche sie von den Coordinatenachsen abschneidet, die constante Fläche c^2 besitzt; man sucht die Einhüllende jener Geraden.

Nennt man u und v die erwähnten Abschnitte, so ist die Gleichung der beweglichen Geraden

$$\frac{x}{u} + \frac{y}{v} = 1,$$

wobei u und v an die Bedingung

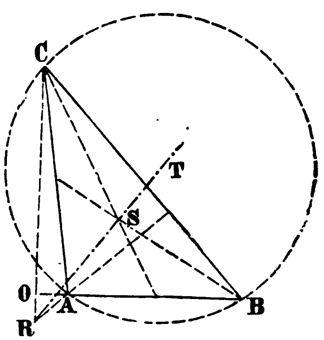
$$uv = c^2$$

gebunden sind. Als Einhüllende ergiebt sich eine Hyperbel, welche durch die Gleichung

$$xy = \tfrac{1}{4}c^2$$

bestimmt ist.

Fig. 43.



Beispiel 9. In jedem Dreieck ABC (Fig. 43) liegen bekanntlich der Höhendurchschnitt R, der Durchschnitt S der Mittellinien (der Schwerpunkt der Dreiecksfläche) und der Mittelpunkt T des umschriebenen Kreises in einer Geraden; lässt man die Spitze C in einer zur Basis AB senkrechten Geraden fortrücken, so ändert die Gerade RST ihre Lage, und es fragt sich, welches die Einhüllende von RST ist.

Die Basis AB sei die Abscissenachse, die zugehörige Höhe OC die Ordinatenachse; für $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$ sind dann die Coordinaten

$$\begin{array}{lllll} \text{von } R\text{:} & \text{Absc.} = 0, & & \text{Ord.} = -\dfrac{ab}{c}, \\ \quad " \quad S\text{:} & \quad " \quad = \dfrac{a+b}{3}, & & \quad " \quad = \dfrac{c}{3}, \\ \quad " \quad T\text{:} & \quad " \quad = \dfrac{a+b}{2}, & & \quad " \quad = \dfrac{ab+c^2}{2c}, \end{array}$$

und demnach ist die Gleichung der Geraden RST

$$(a+b)cy = (3ab + c^2)x - ab(a+b).$$

Differenzirt man die Gleichung nach c und eliminirt dann c, so erhält man

$$\left(x - \frac{a+b}{6}\right)^2 - \frac{(a+b)^2}{12ab}y^2 = \left(\frac{a+b}{6}\right)^2.$$

Die Einhüllende ist demnach eine Ellipse oder eine Hyperbel, je nachdem der Punkt O zwischen A und B oder ausserhalb der Geraden AB liegt. Fällt O mit einem der Punkte A und B zusammen, so reducirt sich die Einhüllende auf den Punkt O.

Beispiel 10. In einem Dreiecke ABC ist C mit einem willkürlichen Punkte N der Geraden AB verbunden und die Strecke CN in M halbirt worden; man zieht ferner AM und BM, welche die Gegenseiten des Dreiecks in P bez. Q schneiden; es soll nun die Einhüllende der Geraden PQ bestimmt werden.

Nimmt man $CB = a$ zur Abscissen-, $CA = b$ zur Ordinatenachse und bezeichnet die Gleichung von CN mit $y = tx$, so erhält man als Gleichung von PQ

$$(at^2 + 2bt)x + (2at + b)y = abt$$

und hieraus als Gleichung der Einhüllenden

$$(2bx + 2ay - ab)^2 = 4abxy$$

oder

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \frac{xy}{ab} - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} + \frac{1}{4} = 0.$$

Diese Gleichung repräsentirt eine Ellipse, deren Mittelpunkt die Coordinaten $\frac{1}{3}a$, $\frac{1}{3}b$ besitzt, also der Schwerpunkt des Dreiecks ist, und welche ferner die Dreiecksseiten in deren Mitten berührt.

Wendet man die in der Trigonometrie übliche Bezeichnung an und setzt zur Abkürzung

$$k = a\frac{a^2 - b^2}{b^2 - c^2} = c\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\beta - \gamma)},$$

so bestimmen sich die Winkel ϑ und $90^0 + \vartheta$, welche die Achsen der Ellipse mit der x-Achse bilden, durch die Formel

$$\tan 2\vartheta = \frac{b\sin\gamma}{k + b\cos\gamma},$$

woraus sich leicht eine Construction von ϑ herleiten lässt.

Beispiel 11. Man hat eine Schaar confocaler Parabeln construirt und von einem festen Punkte C (dem Pole) aus an jede solche Parabel Tangenten gelegt, deren Berührungspunkte P und Q heissen mögen; es soll nun die Einhüllende sämmtlicher Berührungssehnen PQ (der Polaren) bestimmt werden.

Der gemeinschaftliche Brennpunkt der Parabeln sei der Coordinatenanfang, p der veränderliche Halbparameter, ab der Pol; die Gleichung einer der Parabeln ist dann

$$y^2 = 2px + p^2$$

und die Gleichung der zum Pole ab gehörenden Polare*

$$p(x + a) - by + p^2 = 0.$$

Für die Einhüllende ergiebt sich hieraus

$$(x + a)^2 + 4by = 0,$$

also wieder eine Parabel, deren Scheitel der Punkt $-a$, 0 ist, und deren Brennpunkt symmetrisch entgegengesetzt dem Pole C liegt.

Beispiel 12. Wie vorhin sei C der feste Pol, in Bezug auf welchen die Polaren einer Schaar confocaler Ellipsen und Hyperbeln construirt sind; man sucht die Einhüllende aller Polaren.

Bezeichnet e die lineare Excentricität, q das Quadrat der Haupthalbachse, so ist für die Ellipse

$$\frac{x^2}{q} + \frac{y^2}{q - e^2} = 1$$

und für die Hyperbel

$$\frac{x^2}{q} - \frac{y^2}{e^2 - q} = 1,$$

welche Gleichungen formell übereinstimmen. Die Gleichung der Polare ist für beide Fälle

* S. Lehrbuch der analytischen Geometrie von Fort und Schlömilch (Leipzig, Teubner). Bd. I, fünfte Aufl. § 35.

$$ax(q - e^2) + byq = q(q - e^2)$$

und daraus folgt als Gleichung der Einhüllenden

$$(ax - by - e^2)^2 + 4abxy = 0$$

oder

$$(ax + by)^2 - 2e^2(ax - by) + e^4 = 0.$$

Legt man die y-Achse auf die entgegengesetzte Seite und setzt

$$\frac{e^2}{a} = a_1, \quad \frac{e^2}{b} = b_1,$$

so ersieht man, dass die Einhüllende identisch ist mit der in Aufg. 5 betrachteten Parabel.

Beispiel 13. In der Ebene eines Kegelschnittes K_1 liege ein beliebiger Punkt P, von welchem aus an den Kegelschnitt Tangenten gelegt sind, deren Berührungspunkte Q und R heissen mögen. Man sucht die Einhüllende aller der Berührungssehnen (Polaren) QR, welche entstehen, wenn der Punkt P einen zweiten Kegelschnitt K_2 durchläuft.

Die Hauptachse von K_2 nehme man zur Abscissenachse und einen Scheitel von K_2 zum Coordinatenanfang; die Coordinaten von P seien p und q; die Gleichung von K_1 hat dann die allgemeine Form

$$Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\begin{aligned} U &= Ax + Cy + D, \\ V &= Cx + By + E, \\ W &= Dx + Ey + F, \end{aligned}$$

so ist die Gleichung der veränderlichen Berührungssehne in den laufenden Coordinaten x und y

$$Up + Vq + W = 0,$$

ausserdem hat man als Gleichung von K_2

$$q^2 = 2hp + kp^2.$$

Zufolge der Bemerkung, dass

$$q^2 - kp^2 = \frac{(U^2 - kV^2)(h^2V^2 - kW^2)}{(U^2 - kV^2)^2},$$

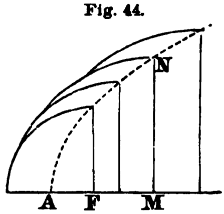
erhält man als Gleichung der einhüllenden Curve

$$h^2V^2 - 2hUW + kW^2 = 0.$$

Vermöge der Werthe von U, V, W ergiebt sich, dass die einhüllende Curve wiederum ein Kegelschnitt K_3 ist, dessen specielle Natur sich nach folgendem Satze entscheidet: je nachdem der Mittelpunkt von K_1 innerhalb, auf oder ausserhalb K_2 liegt, wird K_3 zu einer Ellipse, Parabel oder Hyperbel. Für den Fall eines parabolischen K_1 bleibt der Satz im Wesentlichen derselbe, wenn der unendlich entfernte Punkt der Parabelachse als Mittelpunkt von K_1 betrachtet wird.

Beispiel 14. In einer Parabel, deren Achse die Abscissenachse sein möge, werden die Endpunkte der Abscissen als Mittelpunkte, die zugehörigen Parabelordinaten als Halbmesser von Kreisen genommen; man sucht die Einhüllende dieser Kreise.

Fig. 44.



Setzt man (Fig. 44) $AF = a$, $AM = u$, $MN = v$, so ist die Gleichung des aus M mit dem Radius MN beschriebenen Kreises

$$(x-u)^2 + y^2 = v^2,$$

wobei $v^2 = 4au$ sein muss. Hieraus findet sich, dass die Einhüllende durch die Gleichung

$$y^2 = 4a(x+a)$$

bestimmt, also wieder eine Parabel ist

Beispiel 15. In einer Ellipse, deren grosse Achse die Abscissenachse sein möge, werden die Endpunkte der Abscissen zu Mittelpunkten, die zugehörigen Ellipsenordinaten als Halbmesser von Kreisen genommen; man sucht die Einhüllende dieser Kreise.

Sind u und v die Coordinaten eines Kreismittelpunktes, so hat man

$$(x-u)^2 + y^2 = v^2, \quad \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1;$$

als Einhüllende ergiebt sich hieraus eine concentrische Ellipse, deren Halbachsen $\sqrt{a^2+b^2}$ und b sind.

Ein ähnliches Resultat liefert die Hyperbel.

Beispiel 16. Welches ist die Einhüllende von Kreisen, deren Mittelpunkte auf einer Parabel liegen und deren Peripherien durch den Scheitel derselben Parabel gehen?

Sind u und v die Coordinaten eines Kreismittelpunktes, so gelten die Gleichungen

$$x^2 + y^2 - 2ux - 2vy = 0, \quad u = \frac{v^2}{4a};$$

die Einhüllende hat zur Gleichung

$$x^3 + (2a + x) y^2 = 0$$

und ist demnach eine Cissoide, deren erzeugender Kreis seinen Mittelpunkt in dem Durchschnitte von Parabelachse und Directrix hat und dessen Durchmesser dem Parameter gleichkommt.

Beispiel 17. Welches ist die Einhüllende von Kreisen, deren Mittelpunkte auf einer Ellipse liegen und deren Peripherien durch das Centrum der Ellipse gehen?

Bei derselben Bezeichnung wie in Nr. 15 hat man

$$x^2 + y^2 - 2ux - 2vy = 0, \quad \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1;$$

die Einhüllende bestimmt sich durch die Gleichung

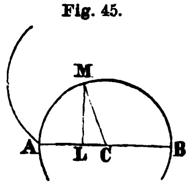
$$(x^2 + y^2)^2 = 4 (a^2x^2 + b^2y^2)$$

und ist folglich die Fusspunktcurve einer aus den Halbachsen $2a$ und $2b$ construirten Ellipse.

Ein ähnliches Resultat liefert die Hyperbel.

Beispiel 18. Welche Einhüllende gehört zu Kreisen, deren Mittelpunkte auf einem gegebenen Kreise liegen und deren Peripherien durch einen festen Punkt der Peripherie des gegebenen Kreises gehen (Fig. 45)?

Fig. 45.



Der Mittelpunkt des gegebenen Kreises sei C, der feste Peripheriepunkt A, ferner $AC = a$, $AL = u$, $LM = v$, endlich A der Anfang und AC die Abscissenachse; es ist dann

$$x^2 + y^2 - 2ux - 2vy = 0, \quad v^2 = u(2a - u).$$

Drückt man u und v durch den Centriwinkel $ACM = \omega$ aus, so hat man bequemer

$$x^2 + y^2 - 2ax = 2a(y \sin\omega - x \cos\omega).$$

Für die Einhüllende ergiebt sich hieraus

$$(x^2 + y^2 - 2ax)^2 = 4a^2(x^2 + y^2);$$

dieselbe ist folglich eine Cardioide, deren erzeugender Kreis AB zum Durchmesser hat.

Beispiel 19. Welche Einhüllende entsteht, wenn eine Ellipse so verändert wird, dass die Summe ihrer Halbachsen constant bleibt?

Bezeichnet k die constante Summe, so findet sich für die Einhüllende

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = k^{\frac{2}{3}},$$

welcher Gleichung die auf S. 98, Aufg. 12 erwähnte Curve entspricht.

Beispiel 20. Man sucht die Einhüllende der Fusspunktcurven aller concentrischen Ellipsen, deren Halbachsen eine constante Summe geben.

Ist wie vorhin k die constante Summe der beiden Halbachsen, so hat man als Gleichung der Fusspunktcurve

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 + (k - a)^2y^2$$

und als Gleichung der Einhüllenden

$$(x^2 + y^2)^3 = k^2x^2y^2$$

oder in Polarcoordinaten

$$r = k \cos\theta \sin\theta.$$

Das letztere Resultat kann man auch unmittelbar dadurch erhalten, dass man von der Polargleichung der Fusspunktcurve ausgeht.

§ 26.

Einhüllende Flächen.

I. Wenn in der Gleichung einer Fläche ausser den Coordinaten x, y, z noch ein willkürlicher Parameter vorkommt, wenn demnach die Gleichung der Fläche unter der Form

$$F(x, y, z, p) = 0$$

enthalten ist, so findet man die Gleichung der einhüllenden Fläche dadurch, dass man p aus den beiden Gleichungen

$$F(x, y, z, p) = 0, \quad \frac{\partial F(x, y, z, p)}{\partial p} = 0$$

eliminirt. Das Verfahren ist also in diesem Falle dasselbe, wie bei der Aufsuchung einhüllender Curven.

Aufgabe 1. Eine Ebene schneidet auf den Achsen der x, y, z der Reihe nach die Strecken p, q, c ab, von denen die letzte constant ist, während p und q sich so verändern, dass ihr Product den constanten Werth k^2 behält; man sucht die Einhüllende aller derartigen Ebenen.

Die Gleichung der veränderlichen Ebene ist

$$\frac{x}{p} + \frac{py}{k^2} + \frac{z}{c} = 1,$$

und hieraus findet sich als Gleichung der einhüllenden Fläche

$$(z - c)^2 = \frac{4c^2}{k^2} xy.$$

Letztere ist demnach ein Kegel zweiten Grades, dessen Mittelpunkt die Coordinaten 0, 0, c besitzt.

Aufgabe 2. Eine durch den Coordinatenanfang gehende Ebene schneidet die xy-Ebene in einer Geraden, welche mit der x-Achse den Winkel α bildet, ebenso die xz-Ebene in einer Geraden, welche mit der x-Achse den Winkel β einschliesst; man verlangt die Einhüllende dieser Ebene für den Fall, dass sich die Ebene dreht, während die Winkelsumme $\alpha + \beta$ den constanten Werth γ behält.

Unter Voraussetzung eines rechtwinkligen Coordinatensystems ist die Gleichung der veränderlichen Ebene

$$x - y \cot\alpha - z \cot(\gamma - \alpha) = 0;$$

betrachtet man α als veränderlichen Parameter, so erhält man als Gleichung der Einhüllenden

$$[x \sin\gamma - (y + z)\cos\gamma]^2 = 4yz.$$

Dieser Gleichung entspricht ein elliptischer Kegel.

Aufgabe 3. Eine Ebene schneide auf den Coordinatenachsen die drei Strecken ab

$$\frac{t^2}{a+t}, \quad \frac{t^2}{b+t}, \quad \frac{t^2}{c+t},$$

wobei a, b, c gegebene Linien, t eine veränderliche Linie bedeuten; man sucht die Einhüllende aller solcher Ebenen.

Die Gleichung der Ebene ist

$$(a + t)x + (b + t)y + (c + t)z = t^2$$

und die Gleichung der Einhüllenden

$$(x + y + z)^2 + 4(ax + by + cz) = 0.$$

Die hiermit bestimmte Fläche ist ein parabolischer Cylinder.

Aufgabe 4. Man sucht die Einhüllende aller Kugeln, deren Mittelpunkte auf einer gegebenen Parabel liegen und deren Oberflächen durch den Scheitel derselben Parabel gehen.

Nimmt man die Ebene der Parabel zur xy-Ebene, ihre Achse zur x-Achse und stellt die Gleichung der Parabel in der Form $v^2 = 2bu$ dar, so ist die Gleichung der veränderlichen Kugelfläche

$$x^2 + y^2 + z^2 - \frac{v^2}{b}x - 2vy = 0;$$

für die Einhüllende ergiebt sich hieraus

$$(x^2 + y^2 + z^2)x + by^2 = 0.$$

Aufgabe 5. Man sucht die Einhüllende aller Kugeln, deren Mittelpunkte auf einer gegebenen Ellipse liegen und deren Oberflächen durch den Mittelpunkt derselben Ellipse gehen.

Verfährt man ähnlich wie bei der vorigen Aufgabe, so hat man als Gleichung der veränderlichen Kugelfläche

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ux - 2vy = 0,$$

wobei u und v der Bedingung

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1$$

genügen müssen. Als Gleichung der Einhüllenden ergiebt sich

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 4(a^2x^2 + b^2y^2).$$

Aufgabe 6. Ein durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} = 2z$$

bestimmtes hyperbolisches Paraboloid werde von einer Ebene geschnitten, welche den festen Punkt $\alpha\beta\gamma$ enthält und demgemäss zur Gleichung haben möge

$$M(x - \alpha) + N(y - \beta) + z - \gamma = 0.$$

Der Schnitt ist im Allgemeinen eine Hyperbel, deren Asymptotenwinkel mittelst der Bemerkung gefunden werden kann, dass zwei in der Schnittebene vom Punkte $\alpha\beta\gamma$ nach den unendlich entfernten Hyperbelpunkten gezogene Gerade einen dem Asymptotenwinkel gleichen Winkel einschliessen. Setzen wir nun in den Gleichungen beider Flächen

$$x = \alpha + r\cos\varphi, \quad y = \beta + r\cos\psi, \quad z = \gamma + r\cos\chi,$$

wobei r die Entfernung der Punkte $\alpha\beta\gamma$ und xyz bedeutet, so haben wir gleichzeitig

$$\frac{(\alpha + r\cos\varphi)^2}{a} - \frac{(\beta + r\cos\psi)^2}{b} = 2(\gamma + r\cos\chi),$$

$$M\cos\varphi + N\cos\psi + \cos\chi = 0.$$

Dividirt man die erste Gleichung durch r^2 und lässt dann r unendlich werden, so entstehen die beiden Gleichungen

$$\frac{\cos^2\varphi}{a} - \frac{\cos^2\psi}{b} = 0,$$

$$M\cos\varphi + N\cos\psi + \cos\chi = 0,$$

und diese drücken die Bedingungen aus, welchen die Richtungswinkel φ, ψ, χ genügen müssen, wenn der Punkt xyz ein unendlich ferner Hyperbelpunkt sein soll. Da die erste Gleichung quadratisch ist, so giebt es zwei derartige Richtungen $\varphi_1\psi_1\chi_1$ und $\varphi_2\psi_2\chi_2$, für welche man findet

$$\frac{\cos\psi_1}{\cos\varphi_1} = +\sqrt{\frac{b}{a}}, \quad \frac{\cos\psi_2}{\cos\varphi_2} = -\sqrt{\frac{b}{a}}.$$

Der Winkel zwischen beiden Richtungen bestimmt sich durch die Formel

$$\begin{aligned} \cos\omega &= \cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\psi_1\cos\psi_2 + \cos\chi_1\cos\chi_2 \\ &= \cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\psi_1\cos\psi_2 \\ &\quad + (M\cos\varphi_1 + N\cos\psi_1)(M\cos\varphi_2 + N\cos\psi_2) \end{aligned}$$

oder

$$\cos\omega = \cos\varphi_1\cos\varphi_2\left\{1 + M^2 + MN\left(\frac{\cos\psi_1}{\cos\varphi_1} + \frac{\cos\psi_2}{\cos\varphi_2}\right) + (1+N^2)\frac{\cos\psi_1}{\cos\varphi_1}\cdot\frac{\cos\psi_2}{\cos\varphi_2}\right\},$$

d. i. zufolge der vorhin angegebenen Werthe

$$\cos\omega = \cos\varphi_1\cos\varphi_2\,\frac{a(1+M^2) - b(1+N^2)}{a}.$$

Im Falle $a(1+M^2) = b(1+N^2)$ oder

$$aM^2 - bN^2 = b - a$$

wird $\omega = \frac{1}{2}\pi$; die vorstehende Gleichung ist also die Bedingung dafür, dass die Ebene

$$M(x-\alpha) + N(y-\beta) + z - \gamma = 0$$

mit dem Paraboloide einen gleichseitigen hyperbolischen Schnitt bildet.

Lässt man die Ebene sich so um den festen Punkt drehen, dass ihre Schnitte mit dem Paraboloide immer gleichseitige Hyperbeln bleiben, so erhält man für die Einhüllende aller derartigen Ebenen

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a} - \frac{(y-\beta)^2}{b} + \frac{(z-\gamma)^2}{a-b} = 0;$$

dieser Gleichung entspricht ein elliptischer Kegel.

Aufgabe 7. Die beiden Hyperboloide und ihr gemeinschaftlicher Asymptotenkegel können durch die eine Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \varepsilon$$

dargestellt werden, wobei $\varepsilon = +1$ dem einfachen Hyperboloide, $\varepsilon = 0$ dem elliptischen Kegel, $\varepsilon = -1$ dem getheilten Hyperboloide entspricht. Für den Schnitt der einen oder anderen dieser Flächen mit einer durch den festen Punkt $\alpha\beta\gamma$ gehenden Ebene hat man ausser der obigen Gleichung noch die folgende

$$M(x-\alpha) + N(y-\beta) + z - \gamma = 0.$$

Wie bei der vorigen Aufgabe findet man leicht, dass die Richtungswinkel φ, ψ, χ einer von $\alpha\beta\gamma$ nach einem unendlich entfernten Punkte des Schnittes gezogenen Geraden an die Bedingungen

$$\frac{\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\cos^2\psi}{b^2} - \frac{\cos^2\chi}{c^2} = 0,$$

$$M\cos\varphi + N\cos\psi + \cos\chi = 0$$

gebunden sind; für das Verhältniss $\frac{\cos\psi}{\cos\varphi}$, welches kurz mit λ bezeichnet werden möge, folgt hieraus die quadratische Gleichung

$$\lambda^2 + \frac{2b^2MN}{b^2N^2 - c^2}\lambda + \frac{b^2(a^2M^2 - c^2)}{a^2(b^2N^2 - c^2)} = 0,$$

deren Wurzeln λ_1 und λ_2 heissen mögen. Der Winkel ω zwischen den entsprechenden Richtungen $\varphi_1\psi_1\chi_1$ und $\varphi_2\psi_2\chi_2$ bestimmt sich durch die Formel

$$\cos\omega = \cos\varphi_1\cos\varphi_2\{1 + M^2 + MN(\lambda_1 + \lambda_2) + (1 + N^2)\lambda_1\lambda_2\};$$

zufolge der Bedeutung von λ_1, λ_2 und unter Einführung der Abkürzungen

$$A = a^2(b^2 - c^2), \quad B = b^2(a^2 - c^2), \quad C = c^2(a^2 + b^2)$$

ergiebt sich weiter

$$\cos\omega = \cos\varphi_1\cos\varphi_2\,\frac{AM^2 + BN^2 - C}{a^2(b^2N^2 - c^2)}.$$

Die Gleichung

$$AM^2 + BN^2 = C$$

ist hiernach die Bedingung dafür, dass die Ebene

$$M(x-\alpha)+N(y-\beta)+z-\gamma=0$$

mit der einen oder anderen der vorhin genannten drei Flächen einen gleichseitig-hyperbolischen Schnitt bildet.

Für die Einhüllende aller derartigen, durch den Punkt $\alpha\beta\gamma$ gehenden Ebenen erhält man die Gleichung

$$\frac{(x-\alpha)^2}{A}+\frac{(y-\beta)^2}{B}-\frac{(z-\gamma)^2}{C}=0,$$

welcher ein elliptischer Kegel entspricht. Ist gleichzeitig $c > a$ und $c > b$, so existiren überhaupt keine gleichseitig-hyperbolischen Schnitte, und dann bedeutet die obige Gleichung keine Fläche mehr.

II. Wenn in der Gleichung einer Fläche zwei von einander unabhängige Parameter p und q vorkommen, so findet man die Gleichung derjenigen Einhüllenden, welche den gleichzeitigen Aenderungen von p und q entspricht, dadurch, dass man aus den Gleichungen

$$F(x, y, z, p, q)=0,$$

$$\frac{\partial F(x, y, z, p, q)}{\partial p}=0, \quad \frac{\partial F(x, y, z, p, q)}{\partial q}=0$$

die Parameter p und q eliminirt.

Aufgabe 8. Eine Ebene bewegt sich so, dass die Strecken, welche sie auf den Coordinatenachsen abschneidet, eine constante Summe haben; man sucht die Einhüllende dieser veränderlichen Ebene.

Bezeichnet man die Achsenabschnitte mit u, v, w, ihre constante Summe mit k, so ist $w=k-u-v$, mithin die Gleichung der Ebene

$$\frac{x}{u}+\frac{y}{v}+\frac{z}{k-u-v}=1.$$

Die veränderlichen Parameter sind hier u und v; für die Einhüllende ergiebt sich die Gleichung

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})^2=k.$$

Die Aufgabe lässt sich auf folgende Art verallgemeinern. Eine feste Ebene schneide von den Coordinatenachsen die Strecken a, b, c ab; man projicirt jeden Punkt dieser Ebene auf die drei Coordinatenachsen und legt durch die drei Projectionen eine neue Ebene. Die Einhüllende der letzteren hat zur Gleichung

$$\left(\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}+\sqrt{\frac{z}{c}}\right)^2=1.$$

Aufgabe 9. Eine Ebene bewegt sich so, dass das Parallelepiped aus den Strecken, welche sie auf den Coordinatenachsen abschneidet, den constanten Inhalt k^3 besitzt; man sucht die Einhüllende dieser Ebene.

Die Gleichung der gesuchten Fläche ist

$$xyz = \frac{1}{27}k^3.$$

Aufgabe 10. Jeder Punkt eines Ellipsoides werde auf die Achsen desselben projicirt und durch die erhaltenen Projectionen eine Ebene gelegt; man sucht die Einhüllende aller dieser Ebenen.

Die Gleichung der veränderlichen Ebene sei

$$\frac{x}{u} + \frac{y}{v} + \frac{z}{w} = 1;$$

die Abschnitte u, v, w sind dann an die Bedingung

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} + \frac{w^2}{c^2} = 1$$

gebunden. Hieraus folgt als Gleichung der Einhüllenden

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Aufgabe 11. Die Berührungsebene im Scheitel eines elliptischen Paraboloids sei die xy-Ebene, die beiden Hauptebenen des Paraboloides mögen die übrigen Coordinatenebenen sein; jeder Punkt der Fläche werde auf die drei Coordinatenachsen projicirt und durch die Projectionen einer Ebene gelegt; man sucht die Einhüllende dieser Ebene.

Die Gleichung der veränderlichen Ebene sei

$$\frac{x}{u} + \frac{y}{v} + \frac{z}{w} = 1,$$

wobei u, v, w der Bedingung

$$\frac{u^2}{a} + \frac{v^2}{b} = 2w$$

genügen müssen; die Gleichung der Einhüllenden ist

$$\left(\frac{x^2}{a}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{y^2}{b}\right)^{\frac{1}{3}} + 2z^{\frac{1}{3}} = 0.$$

Aufgabe 12. Welches ist die Einhüllende aller Kugeln, deren Mittelpunkte auf einem dreiachsigen Ellipsoide liegen und deren Oberflächen durch den Mittelpunkt des Ellipsoides gehen?

Sind u, v, w die Mittelpunktscoordinaten einer solchen Kugel, so hat man als Gleichung der letzteren

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ux - 2vy - 2wz = 0$$

und hierzu die Bedingung

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} + \frac{w^2}{c^2} = 1.$$

Daraus ergiebt sich

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 4(a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2);$$

die Einhüllende ist demnach die Fusspunktfläche eines aus den doppelten Achsen construirten Ellipsoides.

Aufgabe 13. Welche Einhüllende gehört zu Kugeln, deren Mittelpunkte auf einem elliptischen Paraboloide liegen und deren Oberflächen durch den Scheitel desselben Paraboloides gehen?

Bei ähnlicher Bezeichnung wie vorhin ist

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ux - 2vy - 2wz = 0,$$

$$\frac{u^2}{a} + \frac{v^2}{b} = 2w;$$

daraus ergiebt sich

$$(x^2 + y^2 + z^2)z + ax^2 + by^2 = 0.$$

Die Einhüllende ist demnach die Fusspunktfläche eines aus den doppelten Parametern construirten elliptischen Paraboloides.

Aufgabe 14. Ein dreiachsiges Ellipsoid verändert sich so, dass die Summe der Halbachsen den constanten Werth k behält; man sucht die Einhüllende.

Als Gleichung der letzteren findet sich

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} = k^{\frac{2}{3}};$$

die Einhüllende kann daher nach Aufgabe 10 auch aus einer mit dem Radius k beschriebenen Kugel hergeleitet werden, was geometrisch unmittelbar einleuchtet.

Aufgabe 15. Ein dreiachsiges Ellipsoid verändert sich so, dass die Summe der Halbachsenquadrate den constanten Werth h^2 behält; man sucht die Einhüllende.

Die Gleichung der letzteren ist

$$(\varepsilon_1 x + \varepsilon_2 y + z)^2 = h^2,$$

worin ε_1 und ε_2 positive oder negative Einheiten bezeichnen. Hiernach besteht die Einhüllende aus den acht Ebenen, welche von den Coordinatenachsen die Strecken $\pm h$ abschneiden.

Aufgabe 16. Ein dreiachsiges Ellipsoid verändert sich so, dass das Product seiner Halbachsen den constanten Werth k^3 behält; man sucht die Einhüllende.

Als Gleichung derselben findet sich

$$x^2 y^2 z^2 = \tfrac{1}{27} k^6;$$

die Fläche ist also im Wesentlichen dieselbe, wie bei der Aufg. 9.

Aufgabe 17. Welche Einhüllende gehört zur Fusspunktfläche eines dreiachsigen Ellipsoides, dessen Halbachsen die constante Summe k haben.

Aus der Gleichung

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2 x^2 + b^2 y^2 + (k - a - b)^2 z^2$$

erhält man

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 (y^2 z^2 + z^2 x^2 + x^2 y^2) = k^2 x^2 y^2 z^2.$$

Capitel IX.

Bestimmung der Werthe vieldeutiger Ausdrücke.

§ 27.

Die Formen $\frac{0}{0}$, $\infty - \infty$ und $\frac{\infty}{\infty}$.

I. Wenn die Functionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ für den speciellen Werth $x = a$ gleichzeitig verschwinden, so erhält der Quotient $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ die vieldeutige Form $\frac{\varphi(a)}{\psi(a)} = \frac{0}{0}$; der wahre Werth dieses Bruches findet sich dann mittelst des Satzes, dass unter den angegebenen Umständen

$$\frac{\varphi(a)}{\psi(a)} = \frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)}$$

ist. Falls wiederum $\varphi'(a) = 0$ und zugleich $\psi'(a) = 0$ sein sollte, muss derselbe Satz zum zweiten Male angewendet werden u. s. f.

Beispiel 1. Es sei

$$y = \frac{(x-b)^m - (a-b)^m}{x-a};$$

$$\text{für } x = a \text{ wird } y = \frac{0}{0} = m(a-b)^{m-1}.$$

2)
$$y = \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + 7x + 12},$$

$$\text{für } x = -3 \text{ wird } y = \frac{0}{0} = -1.$$

3)
$$y = \frac{1 - (m+1)x^m + mx^{m+1}}{(1-x)^2};$$

$$\text{für } x = 1 \text{ wird } y = \frac{0}{0} = \frac{m(m+1)}{2}.$$

4) $$y = \frac{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a+b}}{\sqrt{a+cx}-\sqrt{a+c}};$$

für $x = 1$ wird $y = \frac{0}{0} = \frac{b}{c}\sqrt{\frac{a+c}{a+b}}.$

5) $$y = \frac{\sqrt{2x-x^4}-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[4]{x^3}};$$

für $x = 1$ wird $y = \frac{0}{0} = \frac{16}{9}.$

6) $$y = \frac{\sqrt{a+bx+cx^2}-\sqrt{a-bx+cx^2}}{\sqrt{\alpha+\beta x}-\sqrt{\alpha-\beta x}};$$

für $x = 0$ wird $y = \frac{0}{0} = \frac{b}{\beta}\sqrt{\frac{\alpha}{a}}.$

7) $$y = \frac{(\sqrt{1+x^2}+x)^m-(\sqrt{1+x^2}-x)^m}{x};$$

für $x = 0$ wird $y = \frac{0}{0} = 2m.$

8) $$y = \frac{(\sqrt{1+x^2}+x)^n+(\sqrt{1+x^2}-x)^n-2}{x^2};$$

für $x = 0$ wird $y = \frac{0}{0} = n^2.$

9) $$y = \frac{a^x-b^x}{x};$$

für $x = 0$ wird $y = \frac{0}{0} = la - lb.$

10) $$y = \frac{x-a-a(lx-la)}{a-\sqrt{2ax-x^2}};$$

für $x = a$ wird $y = \frac{0}{0} = 1.$

11) $$y = \frac{l(x^{2m}+x^m-1)-mlx}{x^2-1};$$

für $x = 1$ wird $y = \frac{0}{0} = m.$

12) $$y = \frac{x^x-1}{x^m+x^n lx-1};$$

für $x = 1$ wird $y = \frac{0}{0} = \frac{1}{m+1}.$

13) $$y = \frac{e^{x^2} - 1}{1 - \cos x};$$

$$\text{für } x = 0 \text{ wird } y = \frac{0}{0} = 2.$$

14) $$y = \frac{\tan x}{kx + l(1 + \sqrt{1 - x^2}) - l2};$$

$$\text{für } x = 0 \text{ wird } y = \frac{0}{0} = \frac{1}{k}.$$

15) $$y = \frac{\sin 3x + 4\sin^3 x - 3l(1 + x)}{(e^x - 1)\sin x};$$

$$\text{für } x = 0 \text{ wird } y = \frac{0}{0} = \tfrac{2}{3}.$$

16) $$y = \frac{1 - \cos x - l\cos x}{x^2};$$

$$\text{für } x = 0 \text{ wird } y = \frac{0}{0} = 1.$$

17) $$y = \frac{1 - \cos(\mu \arcsin x)}{l(1 + x^2)};$$

$$\text{für } x = 0 \text{ wird } y = \frac{0}{0} = \tfrac{1}{2}\mu^2.$$

18) $$y = \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos 2x}}{\sin^2 x};$$

$$\text{für } x = 0 \text{ wird } y = \frac{0}{0} = \tfrac{3}{2}.$$

19) $$y = \frac{1 + 2\cos^3 x - 3\sqrt{\cos 2x}}{\sin^4 x};$$

$$\text{für } x = 0 \text{ wird } y = \frac{0}{0} = \tfrac{9}{4}.$$

20) $$y = \frac{1 - 5\sin^2 x + 4\cos^5 x - 5\sqrt{\cos^3 2x}}{\sin^6 x};$$

$$\text{für } x = 0 \text{ wird } y = \frac{0}{0} = -\tfrac{15}{4}.$$

II. Wenn die Functionen $F(x)$ und $f(x)$ für $x = a$ gleichzeitig unendlich werden, so erhält die Differenz $F(x) - f(x)$ die unbestimmte Form $\infty - \infty$; den wahren Werth derselben findet man dadurch, dass man die Differenz in einen Bruch verwandelt z. B. mittelst der identischen Gleichung

$$F(x) - f(x) = \frac{\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{F(x)}}{\frac{1}{f(x)F(x)}}$$

und diesen, wenn nöthig, nach der vorigen Regel untersucht.

21) $$z = \frac{\alpha}{1 - x^\alpha} - \frac{\beta}{1 - x^\beta};$$

für $x = 1$ wird $z = \infty - \infty = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$.

22) $$z = \frac{1}{lx} - \frac{\alpha}{x^\alpha - 1};$$

für $x = 1$ wird $z = \infty - \infty = \frac{1}{2}\alpha$.

23) $$z = \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1};$$

für $x = 0$ wird $z = \infty - \infty = \frac{1}{2}$.

24) $$z = \frac{2}{x} - \frac{x}{e^x - x - 1};$$

für $x = 0$ wird $z = \infty - \infty = \frac{2}{3}$.

25) $$z = \tfrac{1}{2}\pi \sec x - x \tan x;$$

für $x = \frac{1}{2}\pi$ wird $z = \infty - \infty = 1$.

26) $$z = \frac{1}{x^2} - \cot^2 x;$$

für $x = 0$ wird $z = \infty - \infty = \frac{2}{3}$.

27) $$z = \frac{2 + \cos x}{x^3 \sin x} - \frac{3}{x^4};$$

für $x = 0$ wird $z = \infty - \infty = \frac{1}{60}$.

28) $$z = \cot x - \frac{15 - 6x^2}{x(15 - x^2)};$$

für $x = 0$ wird $z = \infty - \infty = 0$.

29) $$z = \frac{3}{3x^4 - x^6} - \frac{1}{x^3 \arctan x};$$

für $x = 0$ wird $z = \infty - \infty = \frac{1}{5}$.

30) $$z = \frac{2 + \sqrt{1 - x^2}}{3x^4} - \frac{1}{x^3 \arcsin x};$$

für $x = 0$ wird $z = \infty - \infty = \frac{1}{180}$.

III. Wenn die Functionen $f(x)$ und $F(x)$ für $x = a$ gleichzeitig unendlich werden, so erhält der Bruch $\frac{f(x)}{F(x)}$ die vieldeutige Form $\frac{\infty}{\infty}$; der wahre Werth desselben findet sich dann nach dem Satze, dass unter den angegebenen Umständen

$$\frac{f(a)}{F(a)} = \frac{f'(a)}{F'(a)}$$

ist; die Methode zur Bestimmung des wahren Werthes eines vieldeutigen Bruches bleibt also bei der Form $\frac{\infty}{\infty}$ dieselbe wie bei der Form $\frac{0}{0}$.

31)
$$y = \frac{c - lx}{a + \frac{b}{x}};$$

$$\text{für } x = 0 \text{ wird } y = \frac{\infty}{\infty} = 0.$$

32)
$$y = \frac{\log(x - a)}{\log(e^x - e^a)};$$

$$\text{für } x = a \text{ wird } y = \frac{\infty}{\infty} = 1.$$

33)
$$y = \frac{\tan x}{a + \frac{b}{\pi - 2x}};$$

$$\text{für } x = \frac{\pi}{2} \text{ wird } y = \frac{\infty}{\infty} = \frac{2}{b}.$$

34)
$$y = \frac{\log x}{a + b \log \sin x};$$

$$\text{für } x = 0 \text{ wird } y = \frac{\infty}{\infty} = \frac{1}{b}.$$

35)
$$y = \frac{\log x}{a + b \log \tan \mu x};$$

$$\text{für } x = 0 \text{ wird } y = \frac{\infty}{\infty} = \frac{1}{b}.$$

36)
$$y = \frac{lx}{x^m}, \quad m > 0;$$

$$\text{für } x = \infty \text{ wird } y = \frac{\infty}{\infty} = 0.$$

37)
$$y = \frac{x}{e^{ax}}, \quad a > 0;$$

$$\text{für } x = \infty \text{ wird } y = \frac{\infty}{\infty} = 0.$$

38) $$y = \frac{x^\beta}{e^{ax}}, \quad a > 0, \quad \beta > 0;$$

$$\text{für } x = \infty \text{ wird } y = \frac{\infty}{\infty} = 0.$$

39) $$y = \frac{l(a + be^x)}{\alpha + \beta x};$$

$$\text{für } x = \infty \text{ wird } y = \frac{\infty}{\infty} = \frac{1}{\beta}.$$

40) $$y = \frac{l(a + be^x)}{\sqrt{\alpha + \beta x^2}};$$

$$\text{für } x = \infty \text{ wird } y = \frac{\infty}{\infty} = \frac{1}{\sqrt{\beta}}.$$

§ 28.

Die Formen $0 \cdot \infty$, 0^0, ∞^0 und 1^∞.

I. Wenn für $x = a$ gleichzeitig $\varphi(x)$ verschwindet und $f(x)$ unendlich wird, so erhält das Product $\varphi(x) \cdot f(x)$ die Form $0 \cdot \infty$; den wahren Werth desselben findet man dadurch, dass man $\varphi(x) \cdot f(x)$ in einen Quotienten verwandelt, welcher für $x = a$ entweder die Form $\frac{0}{0}$ oder die Form $\frac{\infty}{\infty}$ annimmt; dem ersten Falle entspricht die Umwandlung

$$\varphi(x) \cdot f(x) = \frac{\varphi(x)}{\frac{1}{f(x)}},$$

der zweite Fall entsteht durch

$$\varphi(x) \cdot f(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}}.$$

41) $$z = x^p l\left(\frac{1}{x}\right), \quad p > 1;$$

$$\text{für } x = 0 \text{ wird } z = 0 \cdot \infty = 0.$$

42) $$z = (\pi - 2x) \tan x;$$

$$\text{für } x = \tfrac{1}{2}\pi \text{ wird } z = 0 \cdot \infty = 2.$$

43) $$z = l\left(2 - \frac{x}{a}\right) \cdot \tan \frac{\pi x}{2a};$$

$$\text{für } x = a \text{ wird } z = 0 \cdot \infty = \frac{2}{\pi}.$$

44) $$z = (e^a - e^x) \tan \frac{\pi x}{2a};$$

$$\text{für } x = a \text{ wird } z = 0 \cdot \infty = \frac{2a}{\pi} e^a.$$

45) $$z = l \cos x \cdot \cot x;$$

$$\text{für } x = 0 \text{ wird } z = 0 \cdot \infty = 0.$$

46) $$z = l \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) \cdot \cot x;$$

$$\text{für } x = 0 \text{ wird } z = 0 \cdot \infty = 1.$$

47) $$z = \operatorname{arc} \sin x \cdot \cot x;$$

$$\text{für } x = 0 \text{ wird } z = 0 \cdot \infty = 1.$$

48) $$z = \operatorname{arc} \cos \frac{x}{a} \cdot \tan \frac{\pi x}{2a};$$

$$\text{für } x = a \text{ wird } z = 0 \cdot \infty = \infty.$$

49) $$z = \frac{x}{\alpha + \beta x^2} \cdot l(a + b e^x);$$

$$\text{für } x = \infty \text{ wird } z = 0 \cdot \infty = \frac{1}{\beta}.$$

50) $$z = \sin \frac{c}{x} \cdot l(a + b e^x);$$

$$\text{für } x = \infty \text{ wird } z = 0 \cdot \infty = c.$$

II. Wenn die Potenz $[f(x)]^{\varphi(x)}$ für $x = a$ eine der Formen 0^0, ∞^0, 1^∞ annimmt, so benutzt man die Gleichung

$$[f(x)]^{\varphi(x)} = e^{l f(x) \cdot \varphi(x)}$$

und untersucht den Exponenten $l f(x) \cdot \varphi(x)$ nach den im vorigen Abschnitt gegebenen Regeln.

51) $$u = x^x;$$

$$\text{für } x = 0 \text{ wird } u = 0^0 = 1.$$

52) $$u = x^{\frac{1}{a + b l x}};$$

$$\text{für } x = 0 \text{ wird } u = 0^0 = e^{\frac{1}{b}}.$$

53) $$u = x^{\frac{1}{l(e^x - 1)}};$$

$$\text{für } x = 0 \text{ wird } u = 0^0 = e.$$

54) $$u = \left(\frac{1}{a + be^x}\right)^{\frac{c}{x}};$$

für $x = \infty$ wird $u = 0^0 = e^{-c}$.

55) $$v = x^{\frac{1}{x}};$$

für $x = \infty$ wird $v = \infty^0 = 1$.

56) $$v = (a + be^{\tan x})^{\pi - 2x};$$

für $x = \frac{1}{2}\pi$ wird $v = \infty^0 = e^2$.

57) $$v = (a + bx^m)^{\frac{1}{\alpha + \beta l x}}, \quad m > 0;$$

für $x = \infty$ wird $v = \infty^0 = e^{\frac{m}{\beta}}$.

58) $$w = [\tan(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}x)]^{\cot x};$$

für $x = 0$ wird $w = 1^\infty = e$.

59) $$w = \left(2 - \frac{2x}{\pi}\right)^{\tan x};$$

für $x = \frac{1}{2}\pi$ wird $w = 1^\infty = e^{\frac{2}{\pi}}$.

60) $$w = \left(\cos\sqrt{\frac{2a}{x}}\right)^x;$$

für $x = \infty$ wird $w = 1^\infty = e^{-a}$.

§ 29.

Differentialquotienten von der Form $\frac{0}{0}$.

Wenn aus einer Gleichung zwischen x und y, etwa $f(x, y) = 0$, der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ nach der Formel

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}}{\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}}$$

entwickelt ist, so kann es geschehen, dass für specielle Werthe $x = a$, $y = b$ (welche selbstverständlich der ursprünglichen Gleichung genügen müssen) Zähler und Nenner des rechtsstehenden Bruches gleichzeitig verschwinden, also $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$ wird. Man wendet dann wieder die in § 27, I erwähnte Regel an, wobei aber nicht zu übersehen ist, dass der unbekannte Werth, welchen $\frac{dy}{dx}$ für $x = a$ und $y = b$ annimmt, möglicherweise auch unendlich gross sein kann.

1. Aus der Gleichung

$$x^3 - 3cxy + y^3 = 0$$

folgt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{cy - x^2}{y^2 - cx},$$

welcher Ausdruck für $x = 0$ und $y = 0$ in $\frac{0}{0}$ übergeht. Differenzirt man rechter Hand Zähler und Nenner für sich und setzt zur Abkürzung $\frac{dy}{dx} = y'$, so hat man

$$y' = \frac{cy' - 2x}{2yy' - a}, \quad (x = 0, \quad y = 0),$$

und durch Auflösung dieser quadratischen Gleichung

$$y' = \frac{c \mp \sqrt{c^2 - 4xy}}{2y},$$

oder, wie man leicht findet,

$$y' = \frac{2x}{c + \sqrt{c^2 - 4xy}}, \quad y' = \frac{c + \sqrt{c^2 - 4xy}}{2y}.$$

Die wirkliche Einführung der Werthe $x = 0$ und $y = 0$ giebt nun

$$y' = 0, \quad y' = \pm \infty.$$

Eine Modification dieses Verfahrens beruht auf der Bemerkung, dass der Quotient $\frac{y}{x}$ für $x = 0$ und $y = 0$ denselben Werth annimmt, wie y'; bezeichnet man nun $\frac{y}{x}$ mit t und setzt in der allgemeinen Formel

$$y' = \frac{cy - x^2}{y^2 - cx}$$

$y = xt$, so erhält man

$$\frac{t + y'}{1 + t^2 y'} = \frac{x}{c}.$$

Für $x = 0$ wird hieraus, wenn man q den gemeinsamen Werth nennt, den für diesen Fall t und y' annehmen,

$$\frac{2q}{1 + q^3} = 0$$

und dieser Bedingung genügen $q = 0$ und $q = \pm \infty$.

2) $$x^5 - 5c^3xy + y^5 = 0;$$
für $x = 0$ und $y = 0$ erhält y' die Werthe 0 und $\pm\infty$.

3) $$(x^2 + y^2)^2 = c^2xy;$$
für $x = 0$ und $y = 0$ erhält y' die Werthe 0 und $\pm\infty$.

4) $$(y^2 - x^2)^2 = ax^3 - bxy^2;$$
für $x = 0$ und $y = 0$ erhält y' die Werthe $\pm\sqrt{\frac{a}{b}}$ und $\pm\infty$.

5) $$y^4 + axy^2 = bx^3 - x^4;$$
für $x = 0$ und $y = 0$ erhält y' die Werthe $\pm\sqrt{\frac{b}{a}}$ und $\pm\infty$.

6) $$y^4 + (a^2 + x^2)y^2 = b^2x^2;$$
für $x = 0$ und $y = 0$ erhält y' die Werthe $\pm\frac{b}{a}$.

§ 30.

Zwei allgemeine Sätze.

Nach § 27, III und mit Hilfe der bekannten Relation
$$\varphi(x + h) - \varphi(x) = h\varphi'(x + \varepsilon h),$$
worin ε einen positiven echten Bruch bedeutet, lässt sich sehr leicht folgender Satz beweisen: Wenn $\varphi(x)$ gleichzeitig mit x ins Unendliche wächst und $\varphi(x+1) - \varphi(x)$ gegen eine bestimmte Grenze convergirt, so ist für $x = \infty$
$$Lim\,\frac{\varphi(x)}{x} = Lim\{\varphi(x+1) - \varphi(x)\}.$$

Hiernach ergeben sich z. B. die Grenzwerthe
$$Lim\,\frac{lx}{x} = 0,\quad Lim\,\frac{cot\,\frac{c}{x}}{x} = \frac{1}{c}.$$

Die Substitution $\varphi(x) = l\psi(x)$ führt zu dem weiteren Satze: Wenn $\psi(x)$ gleichzeitig mit x unendlich wächst und $\frac{\psi(x+1)}{\psi(x)}$ gegen eine bestimmte Grenze convergirt, so ist für $x = \infty$
$$Lim\left\{[\psi(x)]^{\frac{1}{x}}\right\} = Lim\,\frac{\psi(x+1)}{\psi(x)}.$$

Hieraus ergeben sich die Grenzwerthe
$$Lim\left(x^{\frac{1}{x}}\right) = 1,\quad Lim\left\{(a + bc^x)^{\frac{1}{x}}\right\} = c,\quad c > 1.$$

Capitel X.

Maxima und Minima der Functionen.

§ 31.

Maxima und Minima der Functionen einer Variabelen.

Eine Function $f(x)$ erreicht jedesmal einen Maximalwerth oder einen Minimalwerth, sobald ihr Differentialquotient $f'(x)$ sein Vorzeichen wechselt, und zwar ist $f(a)$ ein Maximum, wenn $f'(x)$ an der Stelle $x = a$ vom Positiven zum Negativen übergeht, d. h. wenn für unendlich kleine δ gleichzeitig

$$f'(a-\delta) > 0, \quad f'(a+\delta) < 0$$

ist; dagegen bildet $f(a)$ ein Minimum, wenn $f'(x)$ an der Stelle $x = a$ vom Negativen zum Positiven übergeht, d. h. wenn die Ungleichungen

$$f'(a-\delta) < 0, \quad f'(a+\delta) > 0$$

zusammen stattfinden.

Falls $f'(x)$ sich stetig ändert, kann $f'(x)$ sein Vorzeichen nur mittels Durchganges durch Null wechseln, d. h. es muss $f'(a) = 0$ sein; man hat daher diejenigen Werthe von x aufzusuchen, für welche $f'(x) = 0$ wird. Ist a ein solcher Werth, so bedarf es dann noch der Entscheidung, ob $f(a)$ ein Maximum oder Minimum von $f(x)$ darstellt. Meistentheils reicht hierzu der zweite Differentialquotient hin; $f(a)$ ist nämlich ein Maximum oder ein Minimum, je nachdem $f''(a)$ negativ oder positiv ausfällt. Wenn aber $f''(a) = 0$ ist, so muss man die höheren Differentialquotienten von $f(x)$ zu Hülfe nehmen; die Regel ist dann: ein aus der Gleichung $f'(x) = 0$ bestimmter Werth $x = a$ macht $f(x)$ nur dann zu einem Maximum oder Minimum, wenn in der Reihe der Differentialquotienten $f''(x)$, $f'''(x)$ etc. der erste für $x = a$ nicht verschwindende Differentialquotient von gerader Ordnung ist, und zwar bildet $f(a)$ ein Maximum oder Minimum, je nachdem der genannte Differentialquotient für $x = a$ negativ oder positiv ausfällt.

Wenn $f'(x)$ keine stetige Function von x ist, so kann $f'(x)$ sein Vorzeichen plötzlich ändern (z. B. mittelst eines Sprunges von $-\infty$ nach $+\infty$); solche Stellen bedürfen einer genauen Untersuchung, namentlich müssen dann $f(a-\delta)$ und $f(a+\delta)$ besonders discutirt werden.

Beispiel 1. $$y = x(2a - x);$$

für $x = a$ wird $y = a^2$ das Maximum.

2) $$y = x(a^2 - x^2);$$

für $x = -\frac{a}{\sqrt{3}}$ wird $y = -\frac{2a^3}{3\sqrt{3}}$ das Minimum,

für $x = +\frac{a}{\sqrt{3}}$ wird $y = +\frac{2a^3}{3\sqrt{3}}$ das Maximum.

3) $$y = x(a - x)^2;$$

für $x = \frac{1}{3}a$ wird $y = \frac{4}{27}a^3$ das Maximum,

für $x = a$ wird $y = 0$ das Minimum.

4) $$y = x + \frac{a^2}{x};$$

für $x = a$ wird $y = 2a$ das Minimum.

5) $$y = x^2 + \frac{2a^3}{x};$$

für $x = a$ wird $y = 3a^2$ das Minimum.

6) $$y = x^3 + 3\alpha x^2 + 3\beta x;$$

für $x = -\alpha \mp \sqrt{\alpha^2 - \beta}$ wird $y = \alpha(2\alpha^2 - 3\beta) \pm 2\sqrt{(\alpha^2 - \beta)^3}$, $\left\{\begin{matrix}\text{Maximum,}\\ \text{Minimum,}\end{matrix}\right.$ wobei $\alpha^2 - \beta > 0$ sein muss. Im Falle $\alpha^2 - \beta = 0$ hat y weder ein Maximum noch ein Minimum.

7) $$y = \frac{x}{x^2 + \alpha x + \beta};$$

für $x = \mp\sqrt{\beta}$ wird $y = \frac{1}{\alpha \mp 2\sqrt{\beta}}:\left\}\begin{matrix}\text{Minimum,}\\ \text{Maximum,}\end{matrix}\right.$

wobei $\beta > 0$ sein muss. Für $\beta = 0$ besitzt y weder ein Maximum noch ein Minimum.

8) $$y = \frac{x - \gamma}{x^2 + \alpha x + \beta};$$

für $x = \gamma \mp \sqrt{\alpha\gamma + \beta + \gamma^2}$ wird $y = \frac{1}{\alpha + 2\gamma \mp 2\sqrt{\alpha\gamma + \beta + \gamma^2}}:\left\{\begin{matrix}\text{Min.}\\ \text{Max.,}\end{matrix}\right.$

wobei $\alpha\gamma + \beta + \gamma^2 > 0$ sein muss. Im Falle $\alpha\gamma + \beta + \gamma^2 = 0$ hat y weder ein Maximum noch ein Minimum.

9) $$y = x + \sqrt{a(a-x)};$$

für $x = \frac{3}{4}a$ wird $y = \frac{5}{4}a$ das Maximum.

10) $$y = x - \sqrt{a(x-a)};$$

für $x = \frac{5}{4}a$ wird $y = \frac{3}{4}a$ das Minimum.

11) $$y = \sqrt{\alpha + \beta x} + \gamma x;$$

$$\text{für } x = \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma^2}{4\beta\gamma^2} \text{ wird } y = -\frac{\beta^2 + 4\alpha\gamma^2}{4\beta\gamma}$$

zum Maximum oder Minimum, je nachdem $\beta\gamma$ negativ oder positiv ist.

12) $$y = \sqrt{\alpha + \beta x^2} + \gamma x;$$

$$\text{für } x = \mp\gamma\sqrt{\frac{\alpha}{\beta(\beta-\gamma^2)}} \text{ wird } y = \mp\sqrt{\frac{\alpha(\beta-\gamma^2)}{\beta}} : \begin{cases}\text{Minimum,}\\ \text{Maximum,}\end{cases}$$

wobei $\alpha\beta(\beta - \gamma^2)$ positiv sein muss.

13) $$y = \frac{a + bx}{\sqrt{\alpha + \beta x^2}};$$

$$\text{für } x = \frac{\alpha b}{a\beta} \text{ wird } y = \sqrt{\frac{a^2}{\alpha} + \frac{b^2}{\beta}}$$

zum Maximum oder Minimum, je nachdem $a\beta$ positiv oder negativ ist.

14) $$y = \frac{(a + bx)\sqrt{\alpha + \beta x^2}}{x};$$

$$\text{für } x = \sqrt[3]{\frac{a\alpha}{b\beta}} \text{ wird } y = \sqrt{\frac{(ab_1 + ba_1)^3}{ab}}$$

zum Minimum oder Maximum, je nachdem $b\beta$ positiv oder negativ ist. Die Grössen a_1 und b_1 dienen zur Abkürzung, nämlich

$$a_1 = \sqrt[3]{a\alpha}, \quad b_1 = \sqrt[3]{b\beta};$$

15) $$y = \frac{1+x}{x}\left(1 + x - \sqrt{1 - 2\varepsilon x + x^2}\right),$$

worin ε einen echten Bruch bezeichnet. Aus

$$y' = \frac{1-x}{x^2}\left\{\frac{1 + (1-\varepsilon)x + x^2}{\sqrt{1 - 2\varepsilon x + x^2}} - (1+x)\right\}$$

folgt, weil der Parentheseninhalt positiv ist,

für $x = 1$, $y = 2\left(2 - \sqrt{2 - 2\varepsilon}\right)$ das Maximum.

Man hat daher

$$\frac{1+x}{x}\left(1+x-\sqrt{1-2\varepsilon x+x^2}\right) \gtreqless 2\left[2-\sqrt{2(1-\varepsilon)}\right];$$

für $x=\frac{b}{a}$, $\varepsilon=\cos\gamma$ ergiebt sich hieraus die geometrische Beziehung

$$\sqrt{a^2-2ab\cos\gamma+b^2} \geqq a+b-4h\sin^2(45^0-\tfrac{1}{4}\gamma),$$

wobei h das harmonische Mittel zwischen a und b bedeutet.

16) $$y=2x+3\sqrt[3]{b(x-a)^2},\quad b>0;$$

für $x=a-b$ wird $y=2a+b$ das Maximum,
„ $x=a$ „ $y=2a$ „ Minimum.

17) $$y=2x-3\sqrt[3]{b(x-a)^2},\quad b>0;$$

für $x=a$ wird $y=2a$ das Maximum,
„ $x=a+b$ „ $y=2a-b$ „ Minimum.

18) $$y=b+\sqrt[3]{\frac{(2ax-x^2)^2}{a}},\quad a>0;$$

für $x=0$ wird $y=b$ ein Minimum,
„ $x=a$ „ $y=b+a$ das Maximum,
„ $x=2a$ „ $y=b$ ein Minimum.

19) $$y=\sqrt[3]{bx^2}+\sqrt[3]{c(x-a)^2},\quad b>0,\quad c>0;$$

für $x=0$ wird $y=\sqrt[3]{a^2c}$ ein Minimum,
„ $x=\frac{ab}{b+c}$ „ $y=\sqrt[3]{a^2(b+c)}$ das Maximum,
„ $x=a$ „ $y=\sqrt[3]{a^2b}$ ein Minimum.

20) $$y=\sqrt[3]{bx^2}-\sqrt[3]{c(x-a)^2},\quad b>c>0;$$

für $x=0$ wird $y=-\sqrt[3]{a^2c}$ ein Minimum,
„ $x=a$ „ $y=+\sqrt[3]{a^2b}$ das Maximum,
„ $x=\frac{ab}{b-c}$ „ $y=\sqrt[3]{a^2(b-c)}$ ein Minimum.

21) $$y=x^me^{-x},\quad m>0;$$

für $x=m$ wird $y=\left(\frac{m}{e}\right)^m$ das Maximum.

22) $$y = be^{\frac{x}{a}} - x;$$

für $x = a\,l\left(\frac{a}{b}\right)$ wird $y = a\left\{1 - l\left(\frac{a}{b}\right)\right\}$ das Minimum,

wobei ab positiv sein muss.

23) $$y = x^m l\left(\frac{a}{x}\right);$$

für $x = \frac{a}{e^{\frac{1}{m}}}$ wird $y = \frac{a^m}{me}$ zum Maximum oder Minimum,

je nachdem m positiv oder negativ ist.

24) $$y = x^x;$$

für $x = \frac{1}{e}$ wird $y = \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$ das Minimum.

25) $$y = x^{\frac{1}{x}};$$

für $x = e$ wird $y = e^{\frac{1}{e}}$ das Maximum.

26) $$y = \left(\frac{a}{x}\right)^x;$$

für $x = \frac{a}{e}$ wird $y = e^{\frac{a}{e}}$ das Maximum.

27) $$y = \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{x}};$$

für $x = ae$ wird $y = e^{\frac{1}{ae}}$ das Maximum.

28) $$y = \sin x \cdot \sin(\alpha + x);$$

für $x = n\pi - \frac{1}{2}\alpha$ wird $y = -\sin^2\frac{1}{2}\alpha$ ein Minimum,

„ $x = n\pi + \frac{1}{2}(\pi - \alpha)$ „ $y = +\cos^2\frac{1}{2}\alpha$ „ Maximum,

wobei n eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bedeutet.

29) $$y = \sin x \cdot \cos(\alpha + x);$$

für $x = n\pi - \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\alpha$ wird $y = -\sin^2(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\alpha)$ ein Minimum,

„ $x = n\pi + \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\alpha$ „ $y = +\sin^2(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\alpha)$ „ Maximum.

30) $$y = \cot x \cdot \tan(x - \alpha), \quad 0 < \alpha < \pi;$$

für $x = (n + \frac{1}{4})\pi + \frac{1}{2}\alpha$ wird $y = \tan^2(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\alpha)$ ein Maximum,

„ $x = (n - \frac{1}{4})\pi + \frac{1}{2}\alpha$ „ $y = \tan^2(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\alpha)$ „ Minimum.

31) $$y = \sin x \cos^2 x;$$

für $x = (2n - \frac{1}{2})\pi$ wird $y = 0$ ein Maximum,

„ $x = (2n + \frac{1}{2})\pi$ „ $y = 0$ „ Minimum;

wenn ferner zur Abkürzung $\operatorname{arc}\tan \frac{1}{\sqrt{2}} = \vartheta$ gesetzt wird, so ist

für $x = 2n\pi + \vartheta$ und für $x = (2n+1)\pi - \vartheta$, $y = +\frac{2}{3\sqrt{3}}$ ein Max.,

„ $x = 2n\pi - \vartheta$ „ „ $x = (2n+1)\pi + \vartheta$, $y = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$ „ Min.

32) $$y = \frac{1}{2}\left(a \sin x + \frac{b}{\sin x}\right), \quad a > b > 0,$$

für $x = (2n + \frac{1}{2})\pi$ wird $y = +\frac{1}{2}(a+b)$ ein Maximum,

„ $x = (2n - \frac{1}{2})\pi$ „ $y = -\frac{1}{2}(a+b)$ „ Minimum;

wenn ferner $\operatorname{arc}\sin \sqrt{\frac{b}{a}} = \vartheta$ ist, so wird

für $x = 2n\pi + \vartheta$ und für $x = (2n+1)\pi - \vartheta$, $y = +\sqrt{ab}$ ein Min.,

„ $x = 2n\pi - \vartheta$ „ „ $x = (2n+1)\pi + \vartheta$, $y = -\sqrt{ab}$ „ Max.

33) $$y = \frac{1}{2}(a \tan x + b \cot x), \quad a > 0, \quad b > 0;$$

bezeichnet man $\operatorname{arc}\tan \sqrt{\frac{b}{a}}$ mit ϑ, so wird

für $x = n\pi + \vartheta$, $y = +\sqrt{ab}$ ein Minimum,

„ $x = n\pi - \vartheta$, $y = -\sqrt{ab}$ „ Maximum.

34) $$y = e^x \sin(x - \alpha);$$

für $x = (2n - \frac{1}{4})\pi + \alpha$ wird $y = -\frac{1}{\sqrt{b}} e^{(2n - \frac{1}{4})\pi + \alpha}$ ein Minimum,

„ $x = (2n + \frac{3}{4})\pi + \alpha$ „ $y = +\frac{1}{\sqrt{2}} e^{(2n + \frac{3}{4})\pi + \alpha}$ „ Maximum,

35) $y = e^x[x \sin(x + \alpha) + (1 - x)\cos(x + \alpha)]; \quad \alpha > 0;$

für $x = 0$ wird $y = \cos\alpha$ ein Minimum;

für $x = (2n+1)\pi - \alpha$ wird $y = [(2n+1)\pi - \alpha - 1]\,e^{(2n+1)\pi - \alpha}$ ein Max.,

für $x = 2n\pi - \alpha$ wird $y = -(2n\pi - \alpha - 1)e^{2n\pi - \alpha}$ ein Minimum.

36) $$y = x \operatorname{arc}\sin x + \sqrt{1 - x^2};$$

für $x = 0$ wird $y = 1$ das Minimum.

37) $$y = x \arctan x - \tfrac{1}{2} l(1 + x^2);$$

für $x = 0$ wird $y = 0$ das Minimum.

38) $$y = x \arctan \frac{1}{x} + \tfrac{1}{2} l(1 + x^2);$$

für $x = 0$ wird $y = 0$ das Minimum.

39) $$y = \frac{1}{1 + x^2}\left(\tfrac{1}{2} - x \arctan \frac{1}{x}\right);$$

für $x = 0$ wird $y = \frac{1}{2}$ das Maximum,

für $x = \pm 1$ wird $y = -\frac{1}{8}(\pi - 2)$ ein Minimum.

40) $$y = \frac{9x + 7x^3}{(1 + x^2)(9 + x^2)} - \arctan x;$$

für $x = -\sqrt{3}$ wird $y = -(\frac{5}{8}\sqrt{3} - \frac{1}{3}\pi)$ das Minimum,

„ $x = +\sqrt{3}$ „ $y = \frac{5}{8}\sqrt{3} - \frac{1}{3}\pi$ das Maximum.

41) $$y = \frac{1 + 2x \arctan x}{1 + x^2};$$

für $x = -1$ wird $y = \frac{1}{4}(\pi + 2)$ ein Maximum,

„ $x = 0$ wird $y = 1$ das Minimum,

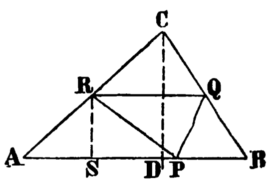
„ $x = +1$ wird $y = \frac{1}{4}(\pi + 2)$ ein Maximum.

§ 32.

Geometrische und physikalische Aufgaben.

1. Es ist ein Dreieck ABC und auf der Seite AB der Punkt P gegeben; man soll die Transversale $QR \parallel AB$ so legen, dass der Flächeninhalt des eingeschriebenen Dreiecks PQR ein Maximum wird (Fig. 46).

Fig. 46.



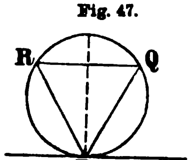
Das Maximum tritt ein, wenn die Höhe des Dreiecks PQR gleich wird der halben Höhe des Dreiecks ABC, also $RS = \frac{1}{2}CD$; es ist dann

$$\triangle PQR = \tfrac{1}{4}\triangle ABC.$$

2. Es ist ein Kreis und ein Peripheriepunkt P desselben gegeben; man soll die Sehne QR parallel der Kreistangente PT so

legen, dass der Flächeninhalt des eingeschriebenen Dreiecks PQR ein Maximum wird (Fig. 47).

Fig. 47.

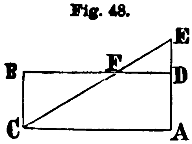


Das Maximum tritt ein, wenn die Entfernung der Sehne vom Punkte P gleich wird $\frac{3}{4}$ des Kreisdurchmessers und es verhält sich dann die Dreiecksfläche zur Kreisfläche wie $\frac{3}{4}\sqrt{3} : \pi$.

Im Wesentlichen bleiben diese Resultate ungestört, wenn man an die Stelle des Kreises eine Ellipse setzt, nur ist dann statt des Kreisdurchmessers derjenige Ellipsendurchmesser zu nehmen, welcher die zu PT parallelen Sehnen halbirt.

3. Durch die Ecke C des gegebenen Rechtecks $ACBD$ soll eine Gerade, welche die Seiten AD in E und BD in F schneidet, so gelegt werden, dass $AE + BF$ ein Minimum wird (Fig. 48).

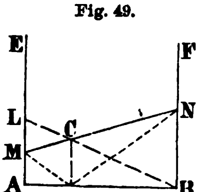
Fig. 48.



Das Minimum tritt ein, wenn $AE = BF$ gleich dem geometrischen Mittel zwischen den Rechteckseiten AC und BC genommen wird.

4. In den Endpunkten einer gegebenen geradlinigen Strecke AB sind auf letzterer Senkrechte AE und BF nach derselben Richtung gezogen; innerhalb des Raumes $EABF$ ist noch ein Punkt C gegeben; durch diesen soll man eine Gerade legen, welche AE in M und BF in N so schneidet, dass das geometrische Mittel zwischen AM und BN ein Minimum wird (Fig. 49).

Fig. 49.



Man erhält die gesuchte Transversale, wenn man BC bis zum Durchschnitte L mit AE verlängert und den Mittelpunkt M des Abschnittes AL mit C verbindet. Ist D die Projection von C auf AB, so gelten hierbei folgende Beziehungen

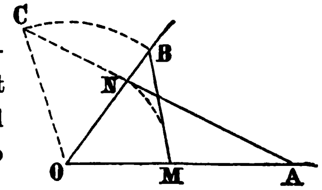
$$\angle CDM = \angle CDN, \quad \sqrt{AD \cdot BD} \cdot \sqrt{AM \cdot BN} = \triangle ABC.$$

5. Auf den Schenkeln eines Winkels sind zwei feste Punkte A und B gegeben; man sucht zwei andere in gleichen Entfernungen vom Scheitel O liegende Punkte M und N der Art, dass $AN + BM$ ein Minimum ist (Fig. 50).

Nimmt man $\angle BOC = \angle BOA$, $OC = OB$ und zieht AC, so schneidet diese Gerade den Schenkel OB in dem einen gesuchten

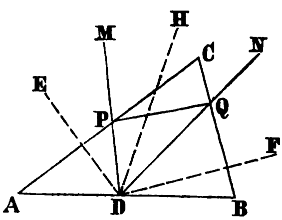
Punkte N; der andere ergiebt sich durch $OM = ON$. Die Gerade AC ist zugleich die gesuchte Minimalsumme. Eine rein geometrische Betrachtung führt leicht zu denselben Resultaten.

Fig. 50.



6. Es ist ein Dreieck ABC gegeben und auf der Seite AB der Punkt D; auf den anderen Seiten AC und BC sollen die Punkte P und Q so bestimmt werden, dass der Winkel PDQ eine gegebene Grösse γ hat und dass der Flächeninhalt des Dreiecks PDQ ein Minimum wird (Fig. 51).

Fig. 51.



Setzt man $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\alpha + \beta - \gamma = \delta$ und bezeichnet $\angle APD$ mit x, so findet man, dass das gesuchte Minimum eintritt, wenn $\sin x \sin(x + \delta)$ ein Maximum wird. Dies führt zu folgender Construction. Man zieht $DE \perp AC$, $DF \perp BC$, halbirt den Winkel EDF und trägt zu beiden Seiten der Halbirungslinie DH die gleichen Winkel HDM und HDN ab, deren Schenkel DM und DN die gesuchten Punkte bestimmen.

7. Um ein gegebenes Dreieck ABC soll das grösste gleichseitige Dreieck PQR beschrieben werden (Fig. 52). Nach der gewöhnlichen Bezeichnung der Seiten und Winkel eines Dreiecks ist für $\angle ACQ = \varphi$

$$PQ = \frac{b \sin\varphi + c \sin(60^0 + \alpha - \varphi)}{\sin 60^0}$$

und daher für den Fall, dass der Umfang und ebenso die Fläche von PQR ein Maximum werden soll,

$$\tan\varphi = \frac{b - c\cos(60^0 + \alpha)}{c \sin(60^0 + \alpha)}.$$

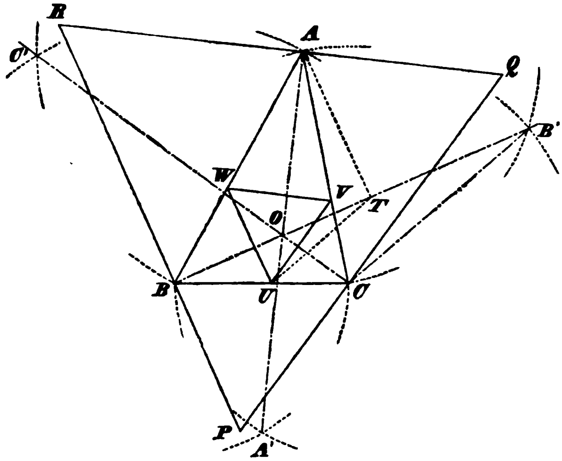
Construirt man über den Seiten das Dreieck ABC die gleichseitigen Dreiecke ABC', BCA', CAB', so schneiden sich die Geraden AA', BB', CC' in einem Punkte O; die Seiten des gesuchten Dreiecks PQR stehen senkrecht auf AA', BB', CC' und sind hiernach leicht zu construiren.

8. In ein gegebenes Dreieck ABC soll das kleinste gleichseitige Dreieck UVW beschrieben werden (Fig. 52).

Für $\angle CVU = \tau$ ist

$$UV = \frac{bc\sin\alpha}{b\sin\tau + c\sin(60^0 + \alpha - \tau)},$$

Fig. 52.

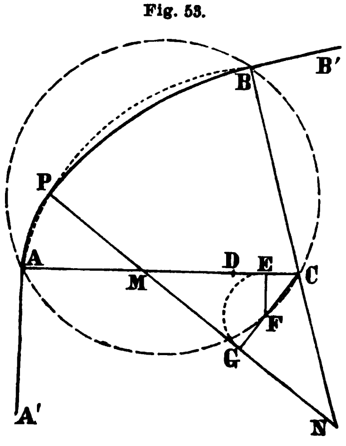


mithin, wenn Umfang und Fläche von UVW Minima werden sollen,

$$\tan\tau = \frac{b - c\cos(60^0 + \alpha)}{c\sin(60^0 + \alpha)}.$$

Fällt man von A auf BB' die Senkrechte AT und legt durch T parallel zu $B'C$ eine Gerade, so giebt deren Durchschnitt mit BC die eine Ecke U; die übrigen Ecken V und W findet man mittelst der Bemerkung, dass die Seiten des Dreiecks UVW parallel zu den Seiten des Dreiecks PQR liegen.

Fig. 53.



9. Zwei gegebene geradlinige Strecken AA' und BB' sollen durch zwei Kreisbögen AP und PB so verbunden werden, dass AA' Tangente an AP, BB' Tangente an BP, ferner P der **innere** Berührungspunkt beider Bögen und dass endlich die Differenz der Radien beider Bögen ein Minimum ist (Fig. 53).

Es sei C der Durchschnitt der in A und B auf den gegebenen Strecken errichteten Senkrechten $AC = a$, $BC = b$, $\angle ACB = \gamma$, ferner $a > b$ und zur Abkürzung $a - b = c$, $1 - \cos\gamma = k$; man bemerkt leicht, dass der Mittelpunkt M des Bogens AP auf AC, ebenso der Mittelpunkt N des Bogens BP auf der Verlängerung von BC liegen und dass MN gleich der Radiendifferenz $BN - AM$ sein muss. Für $CM = x$, $MN = u$ erhält man der Reihe nach die Grössen von $AM = MP$, $NP = BN$, CN und aus dem Dreiecke CMN

$$u = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{2kx^2 - c^2}{kx - c} - c.$$

Den gegebenen Bedingungen entspricht hiernach

$$CM = CN = \frac{a - b}{4 \sin^2 \frac{1}{4}\gamma};$$

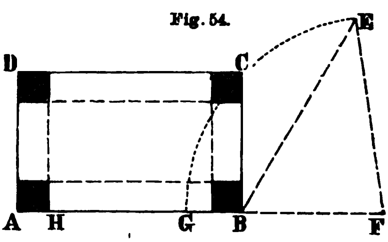
es ist daher $AD = BC$, $CE = \frac{1}{2} CD$ zu nehmen, in E senkrecht zu AC eine Gerade zu errichten, welche die Halbirungslinie des Winkels ACN in F schneidet, endlich CF um $FG = FE$ zu verlängern und durch G senkrecht zu CG eine Gerade zu ziehen, welche auf AC und BC die gesuchten Punkte M und N bestimmt.

Beiläufig sei noch bemerkt, dass F auf dem um das Dreieck ABC beschriebenen Kreise liegt und dass A, P, B Punkte eines aus dem Mittelpunkte F beschriebenen Kreises sind.

Die Determination, unter welcher die Aufgabe nur möglich ist, findet man leicht aus dem angegebenen Werthe von CM.

10. Aus einer rechteckförmigen Tafel soll durch Wegschneiden von vier gleichen Eckquadraten und gehöriges Zusammenbiegen ein offener rechtwinkliger Kasten von möglichst grossem Volumen gebildet werden (Fig. 54).

Fig. 54.



Sind $AB = a$, $BC = b$ die Seiten des gegebenen Rechtecks und bezeichnet x die gesuchte Quadratseite AH, so erhält man für x die quadratische Gleichung

$$12x^2 - 4(a + b)x + ab = 0,$$

von welcher aber nur die kleinere Wurzel zu gebrauchen ist. Mittelst eines Dreiecks EBF, worin $\angle EBF = 60^0$ ist, kann AH leicht construirt werden.

Wählt man zwei genaue Zahlen m und $n < \frac{1}{2}m$ willkürlich und setzt

$$a = 6(m^2 - n)^2, \quad b = 6m(m - 2n),$$

so erhält man für x den rationalen Werth

$$x = (m + n)(m - 2n);$$

falls die für a, b, x gefundenen Werthe einen gemeinschaftlichen Factor haben, kann derselbe weggelassen werden.

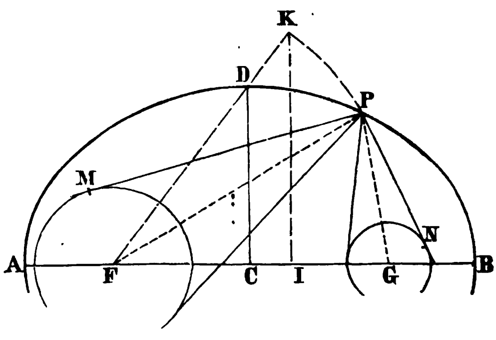
Nach diesen Bemerkungen findet man z. B. für $m = 5$, $n = 1$ die Werthe $a = 8$, $b = 5$, $x = 1$.

11. In der vorigen Aufgabe werde statt des Rechtecks $ABCD$ ein beliebiges Dreieck ABC genommen und im Uebrigen dasselbe Maximalvolumen gesucht. Den Abstand x (der Seiten des inneren Dreiecks von den ihnen parallelen Seiten des Dreiecks ABC) findet man gleich dem dritten Theile von dem Radius des Kreises, welcher dem Dreiecke ABC eingeschrieben ist.

Ein ähnlicher Satz gilt für alle Tangentenvielecke.

12. Um die Brennpunkte einer gegebenen Ellipse sind mit bekannten Radien Kreise beschrieben, welche innerhalb der Ellipse liegen; auf der letzteren soll der Punkt P so bestimmt werden, dass die Summe der von ihm aus an die Kreise gelegten Tangenten ein Maximum wird (Fig. 55).

Fig. 55.



Bezeichnet man die Halbachsen der Ellipse mit a und b, die Radien der um die Brennpunkte F und G beschriebenen Kreise mit f und g, und nimmt den Brennstrahl $FP = r$ als unabhängige Variabele, so hat man

$$2\,MP + 2\,NP = 2\left\{\sqrt{r^2 - f^2} + \sqrt{(2a - r)^2 - g^2}\right\}$$

zu einem Maximum zu machen und erhält

$$FP = \frac{2af}{f+g}, \quad GP = \frac{2ag}{f+g}.$$

Dies giebt folgende Construction: durch den inneren Aehnlichkeitspunkt I der beiden Kreise lege man parallel zu CD eine Gerade, welche FD in K schneidet; dann ist $FK = FP$ der eine, $AB - FK = GP$ der andere Brennstrahl des gesuchten Ellipsenpunktes. Bemerkenswerth ist noch, dass $\angle FPM = \angle GPN$ ist, dass also die beiden Kreise von P aus unter gleichen Winkeln gesehen werden.

13. Um die Brennpunkte einer Ellipse sind Kugeln beschrieben, welche innerhalb der Ellipse liegen; auf der letzteren soll man den Punkt P so bestimmen, dass die Summe der beiden Kugelkappen, welche man von P aus überblickt, ein Maximum wird.

Bei derselben Bezeichnung wie in Nr. 11 handelt es sich hier um das Maximum von

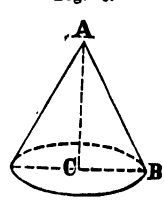
$$2\pi\left\{f^2+g^2-\left(\frac{f^3}{r}+\frac{g^3}{2a-r}\right)\right\};$$

dieses tritt ein, wenn sich die Quadrate der beiden Brennstrahlen von P zu einander verhalten wie die Würfel der Kugelhalbmesser, also für

$$FP = \frac{2a\sqrt{f^3}}{\sqrt{f^3}+\sqrt{g^3}},\quad GP = \frac{2a\sqrt{g^3}}{\sqrt{f^3}+\sqrt{g^3}}.$$

14. Unter allen geraden Kreiskegeln von gleicher Seite AB soll derjenige gefunden werden, dessen Volumen am grössten ist (Fig. 56).

Fig. 56.



Setzt man $AB = c$ und betrachtet den Radius der Grundfläche als unabhängige Variabele ($BC = x$), so findet man

$$BC = c\sqrt{\tfrac{2}{3}},\quad AC = c\sqrt{\tfrac{1}{3}},$$

$$\tan BAC = \sqrt{2},\quad \angle BAC = 54^0 44' 8'', 2.$$

15. In einen geraden Kreiskegel soll der gerade Kreiscylinder vom grössten cubischen Inhalte so eingeschrieben werden, dass die Grundflächen beider Körper concentrisch sind.

Bezeichnet a den Basisradius, b die Höhe des Kegels, so ist der Basisradius des Cylinders $= \frac{2}{3}a$, die Cylinderhöhe $= \frac{1}{3}b$ und das Cylindervolumen $= \frac{4}{9}$ des Kegelinhaltes.

16. In einen geraden Kreiskegel soll der gerade Kreiscylinder von grösstem Mantel einbeschrieben werden.

Bei derselben Bezeichnung wie in Nr. 15 hat der Cylinder den Radius $\frac{1}{2}a$ und die Höhe $\frac{1}{2}b$.

17. In einem geraden Kreiskegel soll derjenige gerade Kreiscylinder einbeschrieben werden, dessen Gesammtoberfläche ein Maximum ist.

Bei derselben Bezeichnung wie vorhin ergiebt sich der Cylinderradius $= \frac{ab}{2(b-a)}$, die Höhe $= \frac{b(b-2a)}{2(b-a)}$, wobei $b > 2a$ sein muss.

18. In eine gegebene Kugel soll der gerade Kreiscylinder von grösstem cubischen Inhalte einbeschrieben werden. Bezeichnet c den Kugelhalbmesser, so ist der Cylinderradius $= c\sqrt{\frac{2}{3}}$ und die Cylinderhöhe $= 2c\sqrt{\frac{1}{3}}$.

19. In eine gegebene Kugel soll der gerade Kreiscylinder von grösstem Mantel einbeschrieben werden.

Bei derselben Bezeichnung wie vorhin ist der Cylinderradius $= c\sqrt{\frac{1}{2}}$ und die Cylinderhöhe $= c\sqrt{2}$.

20. In eine gegebene Kugel soll derjenige gerade Kreiscylinder einbeschrieben werden, dessen Gesammtoberfläche ein Maximum ist.

Der Cylinder hat die Dimensionen

$$\text{Radius} = b\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(1+\sqrt{\tfrac{1}{5}}\right)}, \quad \text{Höhe} = 2c\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(1-\sqrt{\tfrac{1}{5}}\right)}.$$

21. In eine gegebene Kugel soll der gerade Kreiskegel von grösstem cubischen Inhalte einbeschrieben werden.

Der Basisradius ist $\frac{2}{3}c\sqrt{2}$, die Höhe $\frac{4}{3}c$.

22. In eine gegebene Kugel soll der gerade Kreiskegel von grösstem Mantel einbeschrieben werden.

Der gesuchte Kegel ist derselbe wie bei der vorigen Aufgabe.

23. In eine gegebene Kugel soll derjenige gerade Kreiskegel einbeschrieben werden, dessen Gesammtoberfläche ein Maximum ist.

Nimmt man die Höhe des Kegels als unabhängige Variabele, so findet man

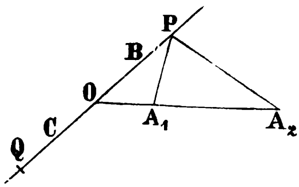
$$\text{Höhe} = \frac{23-\sqrt{17}}{16}c, \quad \text{Basisradius} = \frac{\sqrt{190+14\sqrt{17}}}{16}c.$$

24. Es sind zwei Punkte A_1, A_2 und eine Gerade BC gegeben; in letzterer soll man den Punkt P so bestimmen, dass der Winkel A_1PA_2, unter welchem die Strecke A_1A_2 von P aus gesehen wird, seinen grössten Werth erhält (Fig. 57).

Ist O der Durchschnitt von $A_1 A_2$ mit BC, $OA_1 = a_1$, $OA_2 = a_2$, $\angle A_1 OB = \gamma$, $OP = r$, $\angle A_1 PA_2 = \omega$, so ergiebt sich

$$tan\,\omega = \frac{(a_2 - a_1) r \sin\gamma}{a_1 a_2 - (a_1 + a_2) r \cos\gamma + r^2}$$

Fig. 57.



und wenn ω, also auch $tan\,\omega$ sein Maximum erreichen soll, so muss $r = \pm \sqrt{a_1 a_2}$ sein. Es giebt demnach zwei solcher Punkte P und Q auf entgegengesetzten Seiten von O, und zwar sind P und Q diejenigen Punkte, in welchen die zwei, durch A_1 und A_2 gehenden und BC berührenden Kreise die letztere Gerade tangiren. Bezeichnet man die beiden Maxima von ω mit Ω_1 und Ω_2, so gelten die Formeln

$$tan\,\tfrac{1}{2}\Omega_1 = \frac{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1}}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_1}} \cot\tfrac{1}{2}\gamma,$$

$$tan\,\tfrac{1}{2}\Omega_2 = \frac{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1}}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_1}} \tan\tfrac{1}{2}\gamma,$$

$$tan\,\tfrac{1}{2}(\Omega_1 - \Omega_2) = \frac{a_2 - a_1}{a_2 + a_1} \cot\gamma.$$

25. Auf der Achse einer bestimmten Parabel sind zwei Punkte A_1 und A_2 gegeben; man soll denjenigen Parabelpunkt P ermitteln, für welchen $\angle A_1 PA_2$ ein Maximum ist.

Bezeichnen a_1, a_2 die Abscissen der Punkte A_1, A_2 und ist

$$y = \sqrt{2bx}$$

die Gleichung der Parabel, so findet sich, wenn zur Abkürzung $\frac{1}{2}(a_1 + a_2) - b = c$ gesetzt wird, als Abscisse von P

$$x = \tfrac{1}{3}(c + \sqrt{3a_1 a_2 + c^2}).$$

In dem speciellen Falle $b = \frac{1}{2}(a_1 + a_2)$ wird einfacher $x = \sqrt{a_1 a_2} \cdot tan\,30^0$. Wenn A_1 mit dem Scheitel der Parabel zusammenfällt, ist die Aufgabe nur unter der Bedingung $a_2 > 2b$ lösbar.

26. Auf dem Durchmesser eines bestimmten Kreises sind zwei Punkte A_1 und A_2 gegeben; man soll denjenigen Peripheriepunkt P ermitteln, für welchen $\angle A_1 PA_2$ ein Maximum wird (Fig. 58).

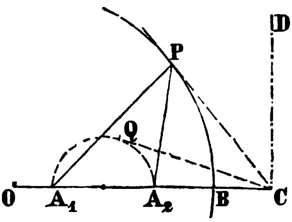
Nimmt man den Kreismittelpunkt zum Coordinatenanfang, setzt $OA_1 = a_1$, $OA_2 = a_2$ und den Kreisradius $OB = b$, so findet man für die rechtwinkligen Coordinaten von P

$$x = \frac{(a_1 + a_2) b^2}{a_1 a_2 + b^2},$$

$$y = \frac{b \sqrt{(b^2 - a_1^2)(b^2 - a_2^2)}}{a_1 a_2 + b^2},$$

welche Formeln zu folgender Construction führen. Man beschreibe über $A_1 A_2$ als Durchmesser einen Kreis und bestimme auf der nöthigenfalls verlängerten Geraden OB denjenigen Punkt C, von welchem aus gleiche Tangenten $CP = CQ$ an beide Kreise gelegt werden können (die Gerade $CD \perp OC$ ist die sogenannte Potenzlinie beider Kreise); der Berührungspunkt P besitzt dann die verlangte Eigenschaft.

Fig. 58.



Wenn A_1 und A_2 gleichzeitig innerhalb oder gleichzeitig ausserhalb des Kreises liegen, ist die Aufgabe immer möglich, dagegen wird sie unmöglich, wenn einer der gegebenen Punkte innerhalb und der andere ausserhalb des Kreises liegt.

27. Auf der Peripherie einer gegebenen Ellipse soll derjenige Punkt bestimmt werden, von welchem aus gesehen die grosse Halbachse der Ellipse am grössten erscheint.

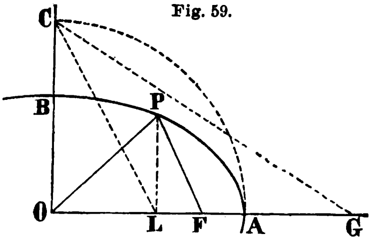
Bezeichnet man die Halbachsen mit a und b, die lineare Excentricität $\sqrt{a^2 - b^2}$ mit c, so erhält man für die Abscisse des gesuchten Punktes die Gleichung

$$(x - a)(c^2 x^2 + a c^2 x - a^4) = 0$$

und hieraus

$$x = \frac{a}{2c}(\sqrt{4a^2 + c^2} - c).$$

Fig. 59.



Die Aufgabe ist nur für $a > b\sqrt{2}$ möglich.

28. Auf der Peripherie einer gegebenen Ellipse soll derjenige Punkt bestimmt werden, von welchem aus gesehen die lineare Excentricität am grössten erscheint (Fig. 59).

Bei derselben Bezeichnung wie vorhin ergiebt sich

$$(cx - a^2)(cx^2 + a^2 x - a^2 c) = 0,$$

$$x = \frac{a}{2c}(\sqrt{a^2 + 4c^2} - a).$$

Nimmt man $OC = OA = a$, $OG = 2OF = 2c$, so schneidet die Halbirungslinie des Winkels OCG die Gerade OA in einem Punkte L, welcher der Endpunkt der Abscisse von P ist.

29. Zwei Punkte A_1, A_2 und eine Curve sind gegeben; auf letzterer soll der Punkt P so bestimmt werden, dass $\angle A_1PA_2$ ein Maximum oder Minimum ist.

Legt man den Coordinatenanfang O auf die Gerade A_1A_2, setzt $OA_1 = a_1$, $OA_2 = a_2$ und bezeichnet in rechtwinkligen Coordinaten die Gleichung der Curve mit

$$y = f(x),$$

so erhält man die Coordinaten x und y von P durch Verbindung der vorstehenden Gleichung mit der folgenden

$$(a_1 + a_2 - 2x)y + [a_1a_2 - (a_1 + a_2)x + x^2 - y^2]y' = 0.$$

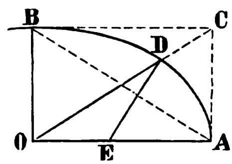
Unter der Voraussetzung, dass die Winkel $PA_1X = \varphi_1$, $PA_2X = \varphi_2$ und der Tangentenwinkel τ in der Richtung von der positiven Seite der x-Achse nach der positiven Seite der y-Achse von 0 bis 180^0 gezählt werden, bedeutet die obige Bedingung, dass $\varphi_1 + \varphi_2$ entweder $= \tau$ oder $= \tau + \pi$ sein muss.

30. Der Mittelpunkt einer Ellipse ist geradlinig mit einem Peripheriepunkte verbunden und durch letzteren die Normale zur Curve gelegt; wie muss der Punkt gewählt werden, wenn der Winkel zwischen jenem Radiusvector und dieser Normale ein Maximum sein soll?

Wird der Ellipsenmittelpunkt als Pol und die grosse Halbachse als Polarachse genommen, so sind die Polarcoordinaten des gesuchten Punktes durch die Formeln bestimmt

$$\tan\theta = \frac{b}{a}, \quad r = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$

Fig. 60.



Der gesuchte Punkt ist also der Durchschnitt D der Ellipse mit der Diagonale OC des aus den Halbachsen construirten Rechtecks $AOBC$ (Fig. 60); die Normale DE steht senkrecht auf der andern Diagonale AB, auch ist $\angle ODE = \angle OBA - \angle OAB$.

31. Auf der Fusspunktcurve einer gegebenen Ellipse sucht man denjenigen Punkt, für welchen der Winkel zwischen dem Radiusvector und der Normale ein Maximum ist.

Sind OA und OB die Achsen der Ellipse, so schneidet die von O auf AB herabgelassene Senkrechte die Fusspunktcurve im gesuchten Punkte.

32. Auf einer gegebenen Curve soll man denjenigen Punkt bestimmen, für welchen der Winkel zwischen Radiusvector und Normale ein Maximum oder Minimum ist.

Bezieht man die Curve auf Polarcoordinaten, etwa

$$r = F(\theta),$$

so bestimmen sich θ und r aus dieser und der folgenden Gleichung

$$r'^2 - rr'' = 0,$$

welche geometrisch bedeutet, dass an der gesuchten Stelle der Krümmungshalbmesser mit der Polarnormale identisch ist.

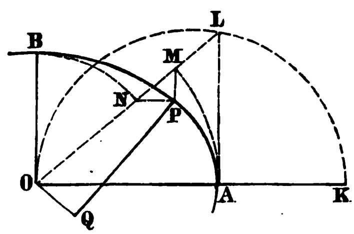
33. Welche Ellipsennormale liegt am weitesten entfernt vom Ellipsenmittelpunkte?

Die Coordinaten desjenigen Ellipsenpunktes, zu welchem in dem Quadranten der positiven Coordinaten die gesuchte Normale gehört, sind

$$x = \sqrt{\frac{a^3}{a+b}}, \quad y = \sqrt{\frac{b^3}{a+b}}.$$

Um den betreffenden Punkt zu construiren (Fig. 61), errichtet man im Endpunkte A der grossen Halbachse senkrecht zu OA die Gerade $AL = \sqrt{ab}$ und zieht OL, welche Gerade den umschriebenen Kreis in M, den eingeschriebenen Kreis in N schneidet und damit auch den gesuchten Punkt P bestimmt. Legt man durch ihn die Ellipsennormale, so ist deren Abstand von O, nämlich OQ, das geforderte Maximum und zwar $= a - b$; gleichzeitig ist $PQ = AL$ und Q der Krümmungsmittelpunkt für die Stelle P.

Fig. 61.



34. Welche Normale der Cardioide liegt am weitesten entfernt von der Spitze der Curve?

In Polarcoordinaten ist für denjenigen Cardioidenpunkt, durch welchen die Normale geht,

$$\cos\theta = \tfrac{1}{3}, \quad r = \tfrac{4}{3}b,$$

wenn b den Durchmesser des erzeugenden Kreises bedeutet.

35. Ein Punkt und eine Curve sind gegeben; man sucht diejenige Normale der Curve, welche von jenem Punkt am weitesten entfernt oder ihm am nächsten liegt.

Wird der gegebene Punkt zum Coordinatenanfang genommen, so ist bei rechtwinkligen Coordinaten die Bedingung

$$(1 + y'^2)^2 + (y - xy')\,y'' = 0$$

zu erfüllen, dagegen bei Polarcoordinaten die Bedingung

$$r'^4 + r^3 r'' = 0.$$

Der Curvenpunkt, durch welchen die gesuchte Normale geht, besitzt hiernach die Eigenschaft, dass der zugehörige Krümmungsradius gleich ist der Entfernung der Tangente vom Coordinatenanfange.

36. Durch einen Ellipsenpunkt P ist eine Ellipsentangente gelegt, welche die verlängerte grosse Achse in T und die verlängerte kleine Achse in U schneidet; der Punkt P soll so bestimmt werden, dass die Strecke TU ihren Minimalwerth erreicht.

Der gesuchte Punkt ist derselbe wie in der Aufgabe 33; das Minimum von TU beträgt $a + b$.

37. Durch den Punkt xy der Curve

$$y = (a - \tfrac{1}{5}x)\sqrt{\frac{x}{a}}$$

ist eine Tangente gelegt, welche die Abscissenachse in T, die Ordinatenachse in U schneidet; für welchen Punkt xy wird TU ein Minimum?

Die Abscisse des gesuchten Punktes ist

$$x = \left[1 + 2\,\frac{\sqrt[3]{9 + \sqrt{17}} + \sqrt[3]{9 - \sqrt{17}}}{3}\right] a = 3{,}70304 \cdot a.$$

38. Es bezeichne t die zwischen den Coordinatenachsen enthaltene Strecke der Tangente, welche durch den Punkt xy an die Curve

$$y = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

gelegt ist; man sucht die Maxima und Minima von t.

Im Falle $b \overline{\overline{<}}\, 2a$ existirt nur ein Minimum für $x = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$ d. h. wenn der gesuchte Punkt mit dem Inflexionspunkte der Curve zusammenfällt.

Ist zweitens

$$2a < b < \frac{3}{\sqrt{2}}\, a,$$

so setze man zur Abkürzung

$$\frac{b - \sqrt{b^2 - 4a^2}}{2} = h, \quad \frac{b + \sqrt{b^2 - 4a^2}}{2} = k;$$

dann wird

für $\qquad x = \frac{a}{\sqrt{2}}, \qquad h, \qquad k$

t ein Minimum, Maximum, Minimum.

Im Falle $b = \frac{3}{\sqrt{2}}\, a$ existirt nur ein Minimum, welches für $x = \sqrt{2} \cdot a$ eintritt.

Ist endlich $b > \frac{3}{\sqrt{2}}\, a$, so entsprechen den Werthen

$$x = h, \qquad \frac{a}{\sqrt{2}}, \qquad k$$

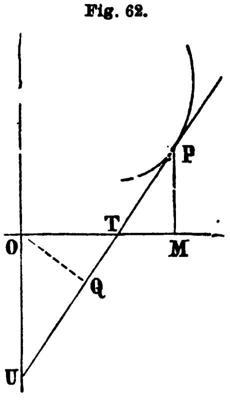
ein Minimum, Maximum, Minimum.

39. Für die Curve

$$y = a e^{-\left(\frac{x}{a}\right)^2}$$

sucht man die Maxima und Minima von t, welches dieselbe Strecke wie in der vorigen Aufgabe bedeuten soll.

Fig. 62.



Für $x = \frac{1}{\sqrt{2}}\, a$, d. h. im Inflexionspunkte der Curve findet ein Minimum statt; diesem folgt

für $x = 0{,}86255 \cdot a$ das Maximum,

„ $x = 1{,}14409 \cdot a$ ein Minimum.

40. Durch den Punkt P einer allgemein gegebenen Curve ist eine Tangente gelegt, welche die Abscissenachse in T, die Ordinatenachse in U schneidet; man sucht diejenigen Punkte P, für welche TU seine grössten oder kleinsten Werthe erreicht (Fig. 62).

Für $OM = x$, $MP = y$ bestimmen sich die gesuchten Punkte aus der Gleichung der Curve, verbunden mit der Bedingung

$$(y + xy'^3)\, y'' = 0.$$

Legt man OQ senkrecht zu TU, so bedeutet diese Bedingung, dass entweder $TP + QU = 0$ oder der Punkt P ein Inflexionspunkt sein muss.

41. Durch einen Parabelpunkt P ist die zugehörige Parabeltangente construirt, welche die Directrix in Q schneidet; man sucht denjenigen Punkt, für welchen die Strecke PQ am kleinsten wird.

Stellt man die Gleichung der Parabel in der Form dar

$$y = 2\sqrt{ax},$$

so erhält man

$$x = \tfrac{1}{2}a, \quad y = \pm\sqrt{2}\cdot a.$$

42. In der vorigen Aufgabe werde die Parabel durch eine Ellipse ersetzt, deren Gleichung

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

sein möge, und dann wieder das Minimum von PQ gesucht.

Es giebt selbstverständlich vier, der Aufgabe genügende Punkte, von denen nur derjenige bestimmt zu werden braucht, dessen Coordinaten positiv sind. Setzt man zur Abkürzung

$$\frac{b}{a} = \mu, \quad \sqrt{3(32 - 61\mu^2 + 32\mu^4)} = \nu,$$

$$\sqrt[3]{\frac{16 - 9\mu^2 + 3\mu\nu}{2}} + \sqrt[3]{\frac{16 - 9\mu^2 - 3\mu\nu}{2}} = \lambda,$$

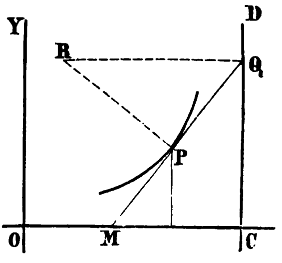
so findet man

$$x = \tfrac{1}{3}\cdot\frac{\lambda - 1}{\sqrt{1 - \mu^2}}\,a.$$

Eine ähnliche Bestimmung gilt für die Hyperbel.

43. Durch den Punkt P einer gegebenen Curve ist an letztere eine Tangente gelegt, welche eine in der Entfernung $OC = c$ parallel zur y-Achse gezogene Gerade CD schneidet; man sucht das Maximum oder Minimum der Strecke PQ (Fig. 63).

Fig. 63.



Für $OM = x$, $MP = y$ bestimmt sich der gesuchte Punkt durch die Gleichung der Curve, verbunden mit der Bedingung

$$(x - c)y'y'' + 1 + y'^2 = 0;$$

die letztere bedeutet geometrisch, dass die Ordinate des Krümmungsmittelpunktes R gleich der Höhe CQ sein muss.

44. In welchen Punkten der auf rechtwinklige Coordinaten bezogenen und durch die Gleichung

$$3a^2y = 2a^2x + x^3$$

bestimmten Curve findet die stärkste oder schwächste Krümmung statt?

Betrachtet man den reciproken Werth des Krümmungshalbmessers als Maass der Krümmung einer Curve, so handelt es sich um das Minimum oder Maximum von ϱ; hier tritt das erste ein für

$$x = \pm \frac{a}{\sqrt{3}}, \quad \varrho = a\sqrt{6}.$$

45. In welchen Punkten der logarithmischen Linie

$$y = b e^{\frac{x}{a}}$$

findet die stärkste oder schwächste Krümmung statt?

Die stärkste Krümmung tritt ein für

$$x = a l\left(\frac{a}{b\sqrt{2}}\right), \quad \varrho = \frac{3\sqrt{3}}{2} a.$$

46. In welchen Punkten der durch die Gleichung $y = f(x)$ bestimmten Curve findet die stärkste oder schwächste Krümmung statt?

Die Coordinaten der gesuchten Punkte müssen den Bedingungen $y = f(x)$ und

$$3y'y''^2 - (1 + y'^2)y''' = 0$$

gleichzeitig genügen.

47. Die Fusspunktcurve der Ellipse wird bekanntlich durch die Polargleichung

$$r^2 = a^2 \cos^2\theta + b^2 \sin^2\theta$$

ausgedrückt und besitzt im Falle $a > b\sqrt{2}$ einen Wendepunkt, für den

$$\tan\theta = \frac{a}{b}\sqrt{\frac{2a^2 - b^2}{a^2 - 2b^2}}$$

ist; bei welchem Achsenverhältnisse wird dieses θ am kleinsten?

Setzt man $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = q$ und betrachtet q als unabhängige Variabele, so wird für $q = 2 + \sqrt{3}$ d. h. für

$$a = 2b\cos 15^0, \quad \theta = 75^0 \text{ ein Minimum.}$$

48. Die gedehnte Epicycloide hat (nach Seite 121) unter der Bedingung

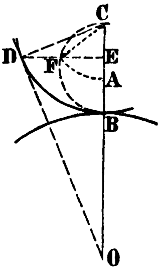
$$\frac{b^2}{a+b} < c < b$$

einen Inflexionspunkt, dessen Wälzungswinkel durch die Formel

$$\cos\omega = \frac{b^3 + (a+b)c^2}{(a+2b)bc}$$

bestimmt ist; wie muss c gewählt werden, wenn dieses ω seinen Maximalwerth erreichen soll?

Fig. 64.



Das Maximum tritt ein für

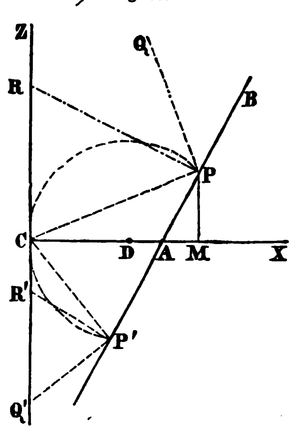
$$c = \sqrt{\frac{b^3}{a+b}}$$

und zwar ist dann

$$\tan\tfrac{1}{2}\omega = \frac{b-c}{b+c}.$$

Dies giebt folgende Construction (Fig. 64). Ist OB der Radius des festen, BC der Halbmesser des beweglichen Kreises in seiner Anfangslage, so beschreibe man über BC als Durchmesser einen Halbkreis, lege an den beweglichen Kreis von O aus die Tangente OD, ziehe senkrecht zu BC die Gerade DE, welche den Halbkreis in F schneidet, und nehme auf CB die Strecke $CA = CF$; es ist dann A der beschreibende Punkt.

Fig. 65.



Wählt man zwei rationale Zahlen m und $n < \frac{1}{2}m$ willkürlich und setzt $a = m(m-n)(m-2n)$, $b = (m-n)n^2$, so erhält c den rationalen Werth

$$c = n^3, \quad \tan\tfrac{1}{2}\omega = \frac{m-2n}{m}.$$

49. In der xy-Ebene, welche man sich normal zur Ebene von Fig. 65 zu denken hat, ist um den Punkt C eine kleine Fläche beschrieben, und diese wird von einer Lichtquelle beleuchtet, welche in der xz-Ebene längs der Geraden AB verschoben werden kann; bei welcher Stellung der Lichtquelle erhält jene Fläche die stärkste Beleuchtung?

Bezeichnet λ die Lichtmenge, welche auf die Fläche fallen würde, wenn die Lichtquelle in der Entfernung 1 senkrecht über der Fläche stände, so kann die Beleuchtung, welche die Fläche von derselben Lichtquelle erhält, wenn letztere sich in P befindet, nach dem Satze bestimmt werden, dass die Beleuchtung direct proportional ist dem Sinus des Einfallswinkels der Lichtstrahlen und umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung; für $CM = x$, $MP = z$ ist sie demnach

$$\frac{\lambda z}{\sqrt{(x^2 + z^2)^3}}.$$

Setzt man noch $CA = a$, $\angle BAX = \beta$, so erhält man für x die Gleichung

$$x^2 - \tfrac{1}{2}(3 + \sin^2\beta)ax + a^2\sin^2\beta = 0;$$

sie führt zu folgender Construction: man nehme $CD = \frac{3}{4}a$ und beschreibe aus D als Mittelpunkt mit dem Radius DC einen Kreis, welcher die Gerade AB in den gesuchten Punkten P und P' schneidet.

Errichtet man in P sowohl auf CP eine Senkrechte, welche die z-Achse in Q trifft, als auch auf AB eine Normale, welche der z-Achse in R begegnet, so ist $CQ = 3CR$ und analog $CQ' = 3CR'$.

50. Die vorige Aufgabe werde dahin modificirt, dass sich die Lichtquelle P längs einer, durch die Gleichung

$$z = \sqrt{2hx}$$

gegebenen Parabel bewegt und dass die beleuchtete Stelle auf der Parabelachse um c vom Scheitel entfernt liegt.

Das Maximum der Beleuchtung tritt ein für

$$x = \tfrac{1}{5}\{2(c-h) + \sqrt{4(c-h)^2 + 5c^2}\}.$$

51. Lässt man in der vorigen Aufgabe an die Stelle der Parabel einen Kreis treten, dessen Gleichung

$$z = \sqrt{a^2 - x^2}$$

ist, so ergiebt sich

$$x = \sqrt{3a^2 + b^2} - b, \quad b = \frac{a^2 + c^2}{2c}.$$

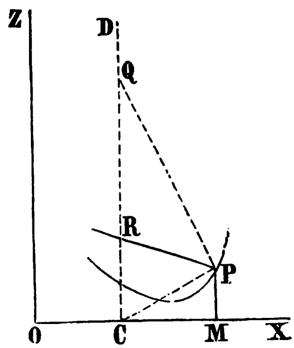
52. Die Lichtquelle P bewege sich auf einer beliebigen, durch eine Gleichung von der Form $z = f(x)$ gegebenen Curve, die beleuchtete Stelle C habe die Coordinaten $OC = c$ und 0; man sucht wieder diejenige Lage von P, bei welcher die Beleuchtung von C ein Maximum oder Minimum wird.

Die Coordinaten des gesuchten Punktes bestimmen sich aus der Gleichung der Curve verbunden mit der Bedingung

$$3(x-c)z - [(x-c)^2 - 2z^2]z' = 0.$$

Legt man $CD \parallel OZ$, bezeichnet mit Q den Durchschnitt von CD mit einer in P auf CP errichteten Senkrechten und nennt R den Durchschnitt von CD mit der durch P gehenden Curvennormale, so hat die obige Gleichung den geometrischen Sinn, dass $CQ = 3\,CR$ sein muss (Fig. 66).

Fig. 66.



53. Die Aufgabe 49 werde dahin verallgemeinert, dass die Gerade AB eine beliebige Lage im Raume erhält und demgemäss durch die beiden Gleichungen

$$x = Mz + a, \quad y = Nz + b$$

bestimmt wird; man sucht wieder die Stellung der Lichtquelle, für welche die Beleuchtung der um C beschriebenen Fläche ein Maximum wird.

Die Coordinaten von P bestimmen sich aus den Gleichungen der Geraden, verbunden mit der Bedingung

$$2(M^2 + N^2 + 1)z^2 + (Ma + Nb)z = a^2 + b^2.$$

Bezeichnet A die Horizontalspur der Geraden AB, und wird auf der Strecke CA der Abschnitt $CE = \frac{3}{4}CA$ genommen, so ist P resp. P' der Durchschnitt von AB mit einem in der Ebene CAB liegenden Kreise, welcher E zum Mittelpunkte und EC zum Radius hat.

Legt man in der Ebene CPZ durch P eine zu CP senkrechte Gerade, welche CZ in Q schneidet, und bezeichnet man ferner mit R den Punkt, in welchem CZ von der durch P normal zu AB liegenden Ebene geschnitten wird, so ist $CQ = 3\,CR$ und analog $CQ' = 3\,CR'$.

54. Ersetzt man in der vorigen Aufgabe die Gerade AB durch irgend eine gegebene Curve, deren Gleichungen

$$x = \varphi(z) \text{ und } y = \psi(z)$$

sind, so erhält man die Bedingung

$$x^2 + y^2 - 2z^2 = 3z\left(x\frac{dx}{dz} + y\frac{dy}{dz}\right).$$

Der geometrische Sinn derselben ist, dass $CQ = 3\,CR$ sein muss, wobei Q denselben Punkt wie vorhin bedeutet und R denjenigen Punkt, in welchem die durch P gehende Normalebene der Curve die Gerade CZ schneidet.

55. **Reciproke Maxima und Minima.** Wenn zwischen drei Grössen x, u, v eine Gleichung von der Form

$$u - v = f(x)$$

stattfindet und es frei steht, die eine oder andere der beiden Grössen u und v zu einer Constanten zu machen, so hat man bei constantem v die Gleichung $u' = f'(x)$, bei constantem u dagegen $v' = -f'(x)$. Aus diesen Gleichungen geht unmittelbar hervor, dass einem Minimum oder Maximum von u ein Maximum oder Minimum von v entspricht, dass also zwei reciproke Sätze entstehen, wie sie in den folgenden Beispielen ausgesprochen sind.

56. Die Grundlinie eines Rechtecks sei g, seine Höhe h, sein Umfang U, seine Fläche V; wird ferner das Verhältniss $h:g$ mit x bezeichnet, so ist

$$\frac{U^2}{V} = 4\,\frac{(1+x)^2}{x},$$

oder

$$2lU - lV = l4 + 2l(1+x) - lx.$$

Diese Gleichung hat die in Nr. 55) erwähnte Form, und da die Function rechter Hand für $x = 1$ ihren Minimalwerth erreicht, so lassen sich folgende zwei reciproke Sätze aufstellen: Unter allen Rechtecken von gleicher Fläche hat das Quadrat den kleinsten Umfang, und unter allen Rechtecken von gleichem Umfang hat das Quadrat die grösste Fläche. Dabei ist immer $U^2 = 16\,V$; einem gegebenen V entspricht $g = h = \sqrt{V}$, bei gegebenem U ist $g = h = \frac{1}{4}U$.

57. Ein cylindrisches Hohlmaass habe r zum Radius der Basis h zur Höhe, U zur Oberfläche, V zum Volumen; für $\frac{h}{r} = x$ ist dann

$$\frac{U^3}{V^2} = \pi\,\frac{(1+2x)^3}{x^2}.$$

Hieraus ergeben sich folgende Sätze: Unter allen cylindrischen Hohlmaassen von gleichem Fassungsraume hat dasjenige die kleinste Oberfläche, dessen Höhe gleich dem Basisradius ist, und unter allen cylindrischen Hohlmaassen von gleicher Oberfläche fasst dasjenige am meisten, bei welchem dasselbe Verhältniss zwischen Höhe und Basisradius stattfindet.

In allen Fällen ist $U^3 = 27\pi V^2$; bei gegebenem V folgt

$$r = h = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}},$$

dagegen bei gegebenem U

$$r = h = \sqrt{\frac{U}{3\pi}}.$$

58. Für einen allseitig geschlossenen Cylinder mögen dieselben Beichnungen wie vorhin gelten; man gelangt dann zu folgenden Sätzen: Unter allen Cylindern von gleichem Inhalte besitzt derjenige die kleinste Oberfläche, dessen Höhe gleich dem Basisdurchmesser ist, und unter allen Cylindern von gleicher Oberfläche hat derjenige das grösste Volumen, bei welchem dasselbe Verhältniss zwischen Höhe und Basisdurchmesser stattfindet.

Dabei ist immer $U^3 = 54\pi V^2$ und, je nachdem V oder U als gegeben betrachtet wird,

$$r = \tfrac{1}{2}h = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}, \quad r = \tfrac{1}{2}h = \sqrt{\frac{U}{6\pi}}.$$

59. Unter allen geraden Kreiskegeln von gleichem Volumen hat derjenige den kleinsten Mantel, dessen Seite $= \sqrt{3} \cdot r$ ist, wo r den Basisradius bezeichnet, und unter allen Kegeln von gleicher Mantelfläche besitzt derjenige das grösste Volumen, bei welchem die nämliche Gleichung stattfindet.

Zugleich ist immer $U^3 = \frac{27\sqrt{3}}{2}\pi V^2$.

60. Unter allen geraden Kreiskegeln von demselben Volumen besitzt derjenige die kleinste Gesammtoberfläche, dessen Seite gleich dem dreifachen Basisradius ist, und unter allen Kegeln von gleicher Oberfläche hat derjenige den grössten cubischen Inhalt, bei welchem zwischen der Seite und dem Basisradius dasselbe Verhältniss stattfindet.

Zugleich ist in beiden Fällen $U^3 = 72\pi V^2$.

61. Ein Körper besteht aus einem geraden Kreiscylinder und einer daran gesetzten Halbkugel, deren ebene Fläche mit der einen ebenen Fläche des Cylinders zusammenfällt; das Verhältniss der Cylinderhöhe zum Radius der Cylinderbasis sei x, U die Oberfläche, V das Volumen des Körpers. Bei constantem V ist dann U ein Minimum, bei constantem U dagegen V ein Maximum für $x = 1$ und $U^3 = 45\pi V^2$.

62. Ein Körper besteht aus einem geraden Kreiskegel und einer daran gesetzten Halbkugel, deren ebene Fläche mit der Kegelbasis zusammenfällt; das Verhältniss der Kegelhöhe zum Radius der Halbkugel sei x, die übrige Bezeichnung wie vorhin; es ist dann

$$\frac{U^3}{V^2} = 9\pi \frac{2 + \sqrt{(1 + x^2)^3}}{(2 + x)^2}.$$

Der Ausdruck rechter Hand wird ein Minimum, wenn

$$x^2 + 6x - 2 - 4\sqrt{1 + x^2}$$

vom Negativen durch Null ins Positive übergeht, was für positive x nur an der Stelle $x = 1{,}1259832$ der Fall ist.

Bei constantem V wird demnach U für diesen Werth ein Minimum, bei constantem U dagegen V ein Maximum.

§ 33.

Maxima und Minima der Functionen mehrerer Variabelen.

Wenn $F(x, y, z \ldots)$ zu einem Maximum oder Minimum gemacht werden soll, so kann man sich $x, y, z \ldots$ als willkürliche Functionen einer neuen Variabelen t denken, und dann muss der Ausdruck

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} + \cdots$$

sein Vorzeichen ändern, während $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$ etc. ganz willkürliche Grössen bedeuten. Falls $\frac{dF}{dt}$ eine stetige Function ist, kann der Vorzeichenwechsel nur durch Null hindurchgehen und hierzu gehören die Bedingungen

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 0, \ldots$$

Um zu entscheiden, ob F durch die hieraus bestimmten Werthe von x, y, z etc. zu einem Maximum oder Minimum wird, muss zunächst untersucht werden, ob $\frac{d^2F}{dt^2}$ durch Substitution jener Werthe negativ oder positiv ausfällt. Sollte dieser Differentialquotient bei der genannten Substitution verschwinden, so müssen die höheren Differentialquotienten von F discutirt werden.

Bei Functionen zweier Variabelen führt die Untersuchung von $\frac{d^2F}{dt^2}$ zu folgender Regel: Die aus den Gleichungen $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ und $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ abgeleiteten Werthe von x und y müssen zunächst der Bedingung

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} < 0$$

genügen und geben das Maximum oder Minimum der Function F, je nachdem sie die Differentialquotienten

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \text{ und } \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$$

gleichzeitig negativ oder positiv machen. Verschwinden dagegen

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

für jene Werthe von x und y, so verliert das angegebene Criterium seine Anwendbarkeit, und es ist dann am zweckmässigsten, aus der Natur der gestellten speciellen Aufgabe zu entscheiden, ob ein Maximum oder Minimum stattfindet. Dieselbe Bemerkung gilt für Functionen von drei oder mehr Variabelen und ebenso für den Fall, dass sprungweise Aenderungen der Differentialquotienten vorkommen.

Beispiele und Aufgaben.

1. Die Function

$$F(x, y) = Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dx + 2Ey + K$$

hat nur dann ein Maximum oder Minimum, wenn $C^2 - AB$ negativ ist; bei negativen A und B liefern die Werthe

$$x = \frac{CE - BD}{AB - C^2}, \quad y = \frac{CD - AE}{AB - C^2}$$

das Maximum, bei positiven A und B das Minimum der Function, nämlich

$$F(x, y) = \frac{2CDE - (AE^2 + BD^2)}{AB - C^2} + K.$$

2. Es sei

$$F(x, y) = xy(Ax + By - C);$$

die partiellen Differentialquotienten dieser Function verschwinden in folgenden Fällen

$$x = 0, \quad y = 0;$$

$$x = 0, \quad y = \frac{C}{B}; \quad x = \frac{C}{A}, \quad y = 0;$$

$$x = \frac{C}{3A}, \quad y = \frac{C}{3B}.$$

Von diesen vier Werthepaaren liefern die drei ersten weder Maxima noch Minima; das letzte giebt das Maximum

$$F(x, y) = -\frac{C^3}{27AB}.$$

3. Eine gegebene Zahl soll derart in drei Theile zerlegt werden, dass das Product aus der m^{ten} Potenz des ersten, der n^{ten} Potenz des zweiten und der p^{ten} Potenz des dritten Theiles ein Maximum wird.

Nur bei positiven m, n, p existirt ein solches Maximum; die gesuchten Theile der Zahl c sind

$$\frac{mc}{m+n+p}, \quad \frac{nc}{m+n+p}, \quad \frac{pc}{m+n+p}$$

und das erwähnte Maximalproduct ist

$$\frac{m^m n^n p^p c^{m+n+p}}{(m+n+p)^{m+n+p}}.$$

4. Von einem innerhalb des gegebenen Dreiecks ABC liegenden Punkte O sind auf die Dreieckseiten BC, CA, AB die Senkrechten OP, OQ, OR herabgelassen; man soll den Punkt O so bestimmen, dass das rechtwinklige Parallelepiped aus den Kanten OP, OQ, OR die kleinste Diagonale besitzt.

Bezeichnet man die Dreieckseiten mit a, b, c, die Senkrechten darauf mit x, y, z und mit Δ die Dreiecksfläche, so hat man den Ausdruck

$$x^2 + y^2 + \left(\frac{2\Delta - ax - by}{c}\right)^2$$

zu einem Minimum zu machen; die hierzu nöthigen Werthe sind

$$x = \frac{2\Delta \cdot a}{a^2+b^2+c^2}, \quad y = \frac{2\Delta \cdot b}{a^2+b^2+c^2}, \quad z = \frac{2\Delta \cdot c}{a^2+b^2+c^2}.$$

Mittelst der Proportion

$$x : y : z = a : b : c$$

wird man leicht eine Construction des Punktes O finden.

Derselbe ist übrigens der gemeinschaftliche Durchschnitt derjenigen drei Geraden, welche die Mittelpunkte der Dreieckseiten mit den Mittelpunkten der zugehörigen Dreieckhöhen verbinden. Die Seiten des Dreiecks PQR verhalten sich wie die Schwerlinien des Dreiecks ABC und stehen senkrecht auf den letzteren.

5. Innerhalb des Dreiecks ABC soll der Punkt O so bestimmt werden, dass das rechtwinklige Parallelepiped, welches die Abstände OP, OQ, OR zu Kanten hat, die grösste Oberfläche besitzt.

Behält man die vorige Bezeichnung bei und setzt zur Abkürzung

$$2(ab + bc + ca) - (a^2 + b^2 + c^2) = N,$$

so erhält man die Werthe

$$x = \frac{2\Delta}{N}(b + c - a), \quad y = \frac{2\Delta}{N}(c + a - b), \quad z = \frac{2\Delta}{N}(a + b - c).$$

Der in das Dreieck ABC beschriebene Kreis berühre die Seiten BC, CA, AB in den Punkten A_0, B_0, C_0; es ist dann

$$AB_0 = AC_0 = \tfrac{1}{2}(b + c - a) = a_0,$$
$$BC_0 = BA_0 = \tfrac{1}{2}(c + a - b) = b_0,$$
$$CA_0 = CB_0 = \tfrac{1}{2}(a + b - c) = c_0,$$

wobei a_0, b_0, c_0 zur Abkürzung dienen; die Proportion

$$x : y : z = a_0 : b_0 : c_0$$

lässt sich jetzt zur Construction des Punktes O benutzen. Noch sei bemerkt, dass sich die Umfänge der Seitenflächen des gesuchten Parallelepipedes wie die Dreieckseiten verhalten.

6. Innerhalb des Dreiecks ABC soll der Punkt O so bestimmt werden, dass das Parallelepiped aus den Kanten OP, OQ, OR das grösstmögliche Volumen besitzt.

Bei derselben Bezeichnung wie vorhin ergeben sich die Werthe

$$x = \frac{2\Delta}{3a}, \quad y = \frac{2\Delta}{3b}, \quad z = \frac{2\Delta}{3c}.$$

Der Punkt O liegt demnach so, dass die Dreiecke BOC, COA, AOB die gleiche Fläche $\frac{1}{3}\Delta$ haben. Theilt man irgend eine Dreieckseite in drei gleiche Theile und zieht durch jeden Theilpunkt eine Parallele zur nächstliegenden Seite, so schneiden sich diese Parallelen in dem gesuchten Punkte O.

7. In der Ebene des Dreiecks ABC soll der Punkt O so bestimmt werden, dass $\overline{AO}^2 + \overline{BO}^2 + \overline{CO}^2$ seinen kleinsten Werth erhält.

Bezeichnet man die Dreieckseiten BC, CA, AB mit a, b, c, die Gegenwinkel mit α, β, γ und setzt $AO = u$, $\angle OAB = \theta$, so findet man für u und θ die Bedingungsgleichungen

$$3u = c\cos\theta + b\cos(\alpha - \theta), \quad 0 = c\sin\theta - b\sin(\alpha - \theta),$$

deren Quadratsumme giebt

$$u = \tfrac{1}{3}\sqrt{b^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha}$$

und analog

$$BO = v = \tfrac{1}{3}\sqrt{c^2 + a^2 + 2ca\cos\beta}, \quad CO = w = \tfrac{1}{3}\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\gamma}.$$

Die Construction von u, v, w liegt sehr nahe und zeigt, dass O der Schwerpunkt des Dreiecks ABC ist.

8. In der Ebene des Dreiecks ABC soll der Punkt O so bestimmt werden, dass die Summe $a_1 AO + b_1 BO + c_1 CO$, worin a_1, b_1, c_1 gegebene positive Factoren bedeuten, ihren Minimalwerth erreicht.

Die vorige Bezeichnung beibehaltend, findet man die beiden Bedingungsgleichungen

$$a_1 = b_1 \frac{c\cos\theta - u}{v} + c_1 \frac{b\cos(\alpha - \theta) - u}{w},$$

$$0 = b_1 \frac{c\sin\theta}{v} - c_1 \frac{b\sin(\alpha - \theta)}{w},$$

d. h., wenn die Verlängerung von AO mit OL bezeichnet wird,

$$a = b_1 \cos BOL + c_1 \cos COL,$$
$$0 = b_1 \sin BOL - c_1 \sin COL.$$

Eliminirt man hieraus einmal c_1, das andere Mal b_1, so folgt

$$a_1 : b_1 : c_1 = \sin BOC : \sin COA : \sin AOB,$$

oder wenn

$$\angle BOC = 180^0 - \sigma, \quad \angle COA = 180^0 - \tau, \quad \angle AOB = 180^0 - \omega$$

gesetzt wird

$$a_1 : b_1 : c_1 = \sin\sigma : \sin\tau : \sin\omega,$$
$$\sigma + \tau + \omega = 180^0.$$

Die Hilfswinkel σ, τ, ω bilden demnach die Winkel eines Dreiecks, dessen Seiten a_1, b_1, c_1 oder diesen Grössen proportional sind; die Möglichkeit des Punktes O setzt die Möglichkeit dieses Dreiecks voraus.

Um hiernach den Punkt O zu construiren, beschreibt man über den Dreieckseiten BC, CA, AB als Sehnen genommen, Kreisbögen, in denen die Winkel $180^0 - \sigma$, $180^0 - \tau$ und $180^0 - \omega$ Peripheriewinkel sind; der gemeinschaftliche Durchschnitt dieser Kreisbögen ist der Punkt O.

In dem einfachsten Falle $a_1 = b_1 = c_1$ wird $\sigma = \tau = \omega = 60^0$ und jeder der Winkel BOC, COA, AOB beträgt dann 120^0. Für $a_1 = a$, $b_1 = b$, $c_1 = c$ werden σ, τ, ω identisch mit den Winkeln α, β, γ und der Punkt O ist dann der Durchschnitt der Höhen des Dreiecks ABC.

9. Auf den Seiten BC, CA, AB eines gegebenen Dreiecks sind die Punkte U, V, W willkürlich gewählt und zu einem Dreiecke UVW verbunden worden; man verlangt eine solche Wahl von U, V, W, dass der Flächeninhalt des Dreiecks UVW ein Minimum werde.

Benutzt man die in der Trigonometrie übliche Bezeichnung und setzt $BU = x$, $CV = y$, $AW = z$, so erhält man die Bedingungen

$$y \sin C + z \sin B = c \sin B,$$
$$z \sin A + x \sin C = a \sin C,$$
$$x \sin B + y \sin A = b \sin A,$$

aus denen hervorgeht, dass UVW die Mittelpunkte der Seiten BC, CA, AB sind.

10. Die Punkte U, V, W mögen wie vorhin einstweilen beliebig gewählt sein; man verlangt dagegen, dass der Umfang des Dreiecks ein Minimum werde.

Setzt man zur Abkürzung $VW = u$, $WU = v$, $UV = w$, so erhält man die Bedingungen

$$\frac{x - (c - z)\cos B}{v} = \frac{a - x - y\cos C}{w},$$
$$\frac{y - (a - x)\cos C}{w} = \frac{b - y - z\cos A}{u},$$
$$\frac{z - (b - y)\cos A}{u} = \frac{c - z - x\cos B}{v},$$

welche geometrisch bedeuten, dass

$$\angle BUW = \angle CUV, \quad \angle CVU = \angle AVW, \quad \angle AWV = \angle BWU,$$

sein muss. Hieraus ergiebt sich weiter

$$\angle BUW = A, \quad \angle CVU = B, \quad \angle AWV = C;$$

die Punkte U, V, W sind folglich die Fusspunkte der Höhen des Dreiecks ABC.

11. Um den gemeinschaftlichen Mittelpunkt O sind mit den Radien a, b, c drei Kreise beschrieben; auf der Peripherie des ersten Kreises ist der Punkt X willkürlich gewählt, ebenso auf dem zweiten Kreise Y, auf dem dritten Z; es sollen nun diejenigen X, Y, Z ermittelt werden, für welche die Fläche des Dreiecks XYZ ihren Maximalwerth erreicht.

Bezeichnet man wie folgt

$$\angle YOZ = \xi, \quad \angle ZOX = \eta, \quad \angle XOY = \zeta = 2\pi - (\xi + \eta),$$

so erhält man als Dreiecksfläche

$$\tfrac{1}{2}\{bc \sin\xi + ca \sin\eta - ab \sin(\xi + \eta)\}$$

und hieraus die Bedingungen

$$\frac{\cos\xi}{a} = \frac{\cos\eta}{b} = \frac{\cos\zeta}{c}.$$

Der gemeinschaftliche Werth der drei unbekannten Quotienten sei $\frac{1}{u}$; es bestimmt sich dann u durch die cubische Gleichung

$$u^3 - (a^2 + b^2 + c^2)u - 2abc = 0,$$

und nachher finden sich ξ, η, ζ mittelst der Formeln

$$\cos\xi = \frac{a}{u}, \quad \cos\eta = \frac{b}{u}, \quad \cos\zeta = \frac{c}{u}.$$

Die obige cubische Gleichung besitzt drei reelle Wurzeln, und es ist daher zu untersuchen, ob jede oder nur eine derselben eine Lösung der Aufgabe liefert.

12. Die Punkte XYZ mögen wie vorhin gewählt sein, dagegen verlangt man, dass der Umfang des Dreiecks XYZ ein Maximum werde.

Versteht man unter ξ, η, ζ dieselben Winkel wie vorhin und unter x, y, z die Dreieckseiten YZ, ZX, XY, so erhält man die Bedingungen

$$\frac{c \sin\xi}{x} = \frac{a \sin\zeta}{z}, \quad \frac{c \sin\eta}{y} = \frac{b \sin\zeta}{z},$$

aus denen hervorgeht, dass O der Mittelpunkt des dem Dreiecke XYZ eingeschriebenen Kreises sein muss. Der Radius des letzteren heisse r; die vorigen Bedingungen lassen sich dann in folgender Form schreiben

$$a \cos\xi = b \cos\eta = c \cos\zeta = -r.$$

Für r erhält man eine cubische Gleichung, welche der in Nr. 11 vorkommenden ähnlich wird, wenn man ihr folgende Gestalt giebt

$$\left(\frac{1}{r}\right)^3 - \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)\frac{1}{r} - \frac{2}{abc} = 0;$$

nachher ist

$$\cos\xi = -\frac{r}{a}, \quad \cos\eta = -\frac{r}{b}, \quad \cos\zeta = -\frac{r}{c}.$$

13. Um den gemeinschaftlichen Mittelpunkt O hat man mit den Radien a, b, c Kreise beschrieben und an jeden der letzteren eine Tangente gelegt; diese Tangenten mögen sich in den Punkten X, Y, Z schneiden. Es soll nun die Fläche des Dreiecks XYZ zu einem Minimum gemacht werden.

Wenn die gegebenen Kreise die entsprechenden Seiten YZ, ZX, XY berühren, so ist nach der in der Trigonometrie üblichen Bezeichnung die Fläche des Dreiecks gleich

$$\frac{(a\sin X + b\sin Y + c\sin Z)^2}{2\sin X\sin Y\sin Z} \text{ und } Z = \pi - (X + Y).$$

Hieraus ergeben sich die Bedingungen

$$a\sin X = b\sin(2X + Y) + c\sin(X + Y),$$
$$b\sin Y = a\sin(X + 2Y) + c\sin(X + Y),$$

oder

$$\frac{\cos X}{a} = \frac{\cos Y}{b} = \frac{\cos Z}{c}.$$

Nennt man $\frac{1}{u}$ den gemeinschaftlichen Werth dieser Quotienten, so ist

$$u^3 - (a^2 + b^2 + c^2)u - 2abc = 0$$

und nachher

$$\cos X = \frac{a}{u}, \quad \cos Y = \frac{b}{u}, \quad \cos Z = \frac{c}{u}.$$

14. Die Punkte X, Y, Z mögen wie vorhin entstanden sein, dagegen verlangt man, dass der Umfang des Dreiecks XYZ ein Minimum werde.

Der Umfang des fraglichen Dreiecks ist

$$(b + c)\cot\tfrac{1}{2}X + (c + a)\cot\tfrac{1}{2}Y + (a + b)\cot\tfrac{1}{2}Z,$$
$$Z = \pi - (X + Y);$$

er wird ein Minimum unter den Bedingungen

$$\frac{b + c}{\sin^2\frac{1}{2}X} = \frac{c + a}{\sin^2\frac{1}{2}Y} = \frac{a + b}{\sin^2\frac{1}{2}Z}.$$

Setzt man

$$\sqrt{b+c}=a_1,\quad \sqrt{c+a}=b_1,\quad \sqrt{a+b}=c_1$$

und den gemeinschaftlichen Werth der vorigen drei Quotienten $= v^2$, so erhält man für v die cubische Gleichung

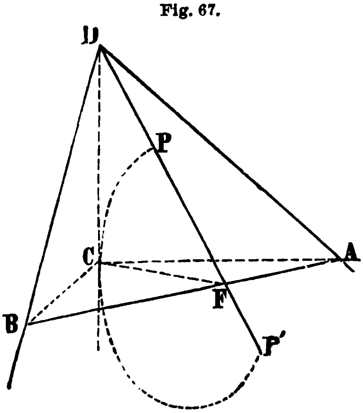
$$v^3-(a_1^2+b_1^2+c_1^2)\,v-2\,a_1 b_1 c_1=0$$

und nachher

$$\sin\tfrac{1}{2}X=\frac{a_1}{v},\quad \sin\tfrac{1}{2}Y=\frac{b_1}{v},\quad \sin\tfrac{1}{2}Z=\frac{c_1}{v}.$$

15. In der Horizontalebene ABC (Fig. 67) ist um den Punkt C eine kleine Fläche beschrieben, und diese wird von einer Lichtquelle P beleuchtet, welche sich in der festen Ebene ABD bewegen lässt; bei welcher Lage von P erhält jene Fläche die stärkste Beleuchtung?

Fig. 67.



Für $CA=a$, $CB=b$, $CD=h$ und wenn CA, CB, CD als Coordinatenachsen genommen werden, ergeben sich die Bedingungen

$$2h^2\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)^2-x^2-y^2$$
$$=3ax\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=2by\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right).$$

Diesen entspricht folgende Construction: man lege die Gerade CF senkrecht zur Horizontalspur AB der gegebenen Ebene und construire in der Ebene DCF einen Kreis, welcher die Gerade CD in C berührt und $\frac{3}{4}CF$ zum Radius hat; dieser Kreis schneidet die Gerade DF in den gesuchten Punkten P und P'.

Legt man in der Ebene DCP durch P senkrecht zu CP eine Gerade, welche CD in Q schneidet, und construirt man ferner in P die zur Ebene ABD gehörende Normale, welche CD in R trifft, so ist $CQ=3\,CR$ und analog $CQ'=3\,CR'$.

16. Die vorige Aufgabe werde dahin verallgemeinert, dass der Punkt C auf der x-Achse eines rechtwinkligen Coordinatensystemes der OX, OY, OZ in der Entfernung $OC=c$ liegt und dass sich die Lichtquelle auf einer durch die Gleichung $z=f(x,y)$ bestimmten

Fläche bewegt; man sucht wieder das Maximum der Beleuchtung der kleinen um C in der xy-Ebene beschriebenen Fläche.

Die Coordinaten von P bestimmen sich aus der Gleichung der Fläche verbunden mit den beiden Bedingungen

$$(x-c)^2+y^2+z^2$$

$$=3z\frac{x-c+z\frac{\partial z}{\partial x}}{\frac{\partial z}{\partial x}}=3z\frac{y+z\frac{\partial z}{\partial y}}{\frac{\partial z}{\partial y}}.$$

Zieht man $CD // OZ$ und legt in der Ebene DCP durch P senkrecht zu CP eine Gerade, welche CD in Q schneidet, so bedeuten die obigen Bedingungen, dass die durch P gehende Normale der Fläche gleichfalls die Linie CD in einem Punkte R schneidet und dass $CQ = 3CR$ ist.

17. **Reciproke Maxima und Minima.** Wenn eine Gleichung von der Form

$$u-v=F(x, y, z, \ldots)$$

stattfindet und es frei steht, die eine oder andere der beiden Grössen u und v constant zu nehmen, so liefern diejenigen Werthe von $x, y, z, \ldots,$ welche $F(x, y, z \ldots)$ zu einem Maximum oder Minimum machen, einerseits das Maximum (resp. Minimum) von u bei constantem v, andererseits das Minimum (resp. Maximum) von v bei constantem u.

18. Aus einem Rechtecke und einem daran gesetzten gleichschenkligen Dreiecke ist ein Fünfeck construirt; die gemeinschaftliche Basis des Rechtecks und des Dreiecks sei $2g$, die Rechteckshöhe h, die Dreieckshöhe h_1, ferner $\frac{h}{g}=x$, $\frac{h_1}{g}=y$, endlich U der Umfang, V der Flächeninhalt des Fünfecks; es ist dann

$$\frac{U^2}{V}=4\frac{(1+x+\sqrt{1+y^2})^2}{2x+y},$$

oder

$$2lU-lV=l4+2l(1+x+\sqrt{1+y^2})-l(2x+y).$$

Das Minimum der Function rechter Hand tritt ein, wenn die beiden Bedingungen

$$\frac{1}{1+x+\sqrt{1+y^2}}-\frac{1}{2x+y}=0,$$

$$\frac{2}{1+x+\sqrt{1+y^2}}\cdot\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}-\frac{1}{2x+y}=0,$$

erfüllt sind. Aus der ersten folgen die Relationen

$$y=\frac{1-(x-1)^2}{2(x-1)},\quad \sqrt{1+y^2}=\frac{1+(x-1)^2}{2(x-1)},$$

nachher liefert die zweite Bedingungsgleichung die Werthe

$$x=1,\quad x=1\pm\frac{1}{\sqrt{3}},$$

von denen zwei unbrauchbar sind, weil y einen positiven endlichen Werth erhalten soll. Für

$$x=1+\frac{1}{\sqrt{3}},\quad y=\frac{1}{\sqrt{3}},\quad \sqrt{1+y^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

wird nun U ein Minimum bei constantem V, und umgekehrt V ein Maximum bei constantem U.

19. Ein Körper bestehe aus einem geraden Kreiscylinder und einem darauf gestellten geraden Kreiskegel, dessen Basis mit der einen ebenen Fläche des Cylinders zusammenfällt; der Cylinder habe den Radius r und die Höhe h, der Kegel die Höhe h_1; es sei $\frac{h}{r}=x$, $\frac{h_1}{r}=y$, die Oberfläche des Körpers $=U$, sein Volumen $=V$; man hat dann

$$\frac{U^3}{V^2}=9\pi\frac{(1+2x+\sqrt{1+y^2})^3}{(3x+y)^2}.$$

Hieraus ergiebt sich, dass die Werthe

$$x=1+\frac{1}{\sqrt{5}},\quad y=\frac{2}{\sqrt{5}},\quad \sqrt{1+y^2}=\frac{3}{\sqrt{5}}$$

das Minimum von U liefern bei constantem V und zugleich das Maximum von V bei constantem U.

20. An die eine ebene Endfläche eines geraden Kreiscylinders ist eine Halbkugel, an die andere ein gerader Kreiskegel angesetzt; bei derselben Bezeichnung wie vorhin ist dann

$$\frac{U^3}{V^2}=9\pi\frac{(2+2x+\sqrt{1+y^2})^3}{(2+3x+y)^2}.$$

Hieraus folgt, dass die Werthe

$$x = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad y = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \sqrt{1+y^2} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

das Minimum von U liefern bei constantem V und zugleich das Maximum von V bei constantem U.

§ 34.

Maxima und Minima mit Nebenbedingungen.

I. Wenn $F(x, y)$ zu einem Maximum oder Minimum gemacht und dabei die Bedingung $\varphi(x, y) = 0$ erfüllt werden soll, so könnte man aus der letzten Gleichung y als Function von x entwickeln und diesen Werth in $F(x, y)$ substituiren, so dass man es nur noch mit einer Function der einen unabhängigen Variabelen x zu thun hat; meistens ist es aber besser, sowohl $F(x, y)$ als die Bedingungsgleichung zu differenziren, wobei y als implicite Function von x gilt, und nachher $\frac{dy}{dx}$ zu eliminiren. Man erhält dann zwei Gleichungen mit den beiden Unbekannten x und y.

1. Auf dem positiven Quadranten der Ellipse

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

soll der Punkt xy so bestimmt werden, dass die Fläche des Rechtecks aus x und y am grössten ausfällt.

Es ist hier

$$F(x, y) = xy, \quad \frac{dF(x, y)}{dx} = x\frac{dy}{dx} + y = 0$$

und zufolge der Ellipsengleichung

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y};$$

nach Substitution dieses Werthes in die vorige Gleichung hat man die beiden Gleichungen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2}$$

und erhält daraus

$$x = \frac{a}{\sqrt{2}}, \quad y = \frac{b}{\sqrt{2}}.$$

Das Maximum von xy beträgt hiernach $\frac{1}{2}\,ab$.

2. An die vorige Ellipse ist im Punkte xy eine Tangente gelegt, welche die Coordinatenachsen OX und OY in den Punkten U und V schneidet; man soll den Berührungspunkt so bestimmen, dass die Diagonale des Rechtecks aus OU und OV ihren Minimalwerth erreicht

Es handelt sich hier um das Minimum von

$$F(x, y) = \frac{a^4}{x^2} + \frac{b^4}{y^2};$$

dieses tritt ein für

$$x = \sqrt{\frac{a^3}{a+b}}, \quad y = \sqrt{\frac{b^3}{a+b}},$$

wonach der Punkt xy derselbe ist wie in Nr. 33, § 32. Das Minimum der Diagonale beträgt $a + b$. Bezeichnet S den Mittelpunkt und zugleich den Schwerpunkt der Geraden UV, so gelten die obigen Formeln auch für das Minimum von OS, das also dem arithmetischen Mittel aus a und b gleichkommt.

3. Man verlangt den kleinsten und grössten Radiusvector, d. i. die Halbachsen einer centrischen Linie zweiten Grades, welche durch die Gleichung

$$Ax^2 + By^2 + 2Cxy = K$$

bestimmt ist.

Unter Voraussetzung eines schiefwinkligen Coordinatensystems, dessen Coordinatenwinkel γ ist, hat man

$$F(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 + 2xy\cos\gamma} = r,$$

und wenn $\frac{dr}{dx} = 0$ werden soll, so folgt

$$x + y\cos\gamma + (y + x\cos\gamma)\frac{dy}{dx} = 0;$$

aus der Gleichung der Curve ergiebt sich ferner

$$Ax + Cy + (By + Cx)\frac{dy}{dx} = 0$$

und mit dem Vorigen zusammen

$$(y + x\cos\gamma)(Ax + Cy) - (x + y\cos\gamma)(By + Cx) = 0.$$

Nimmt man hierzu die Gleichung der Curve in der Form

$$x(Ax + Cy) + y(By + Cx) = K$$

und setzt für den Augenblick

$$Ax + Cy = u, \quad By + Cx = v,$$

so erhält man für die Unbekannten u und v die Werthe

$$u = \frac{K(x + y\cos\gamma)}{x^2 + y^2 + 2xy\cos\gamma} = \frac{K(x + y\cos\gamma)}{r^2},$$

$$v = \frac{K(y + x\cos\gamma)}{x^2 + y^2 + 2xy\cos\gamma} = \frac{K(y + x\cos\gamma)}{r^2}.$$

Nach Restitution von $Ax + Cy$ für u und von $By + Cx$ für v entstehen die Gleichungen

$$(Ar^2 - K)x + (Cr^2 - K\cos\gamma)y = 0,$$
$$(Cr^2 - K\cos\gamma)x + (Br^2 - K)y \quad = 0,$$

aus welchen durch Elimination von x oder y folgt

$$(Ar^2 - K)(Br^2 - K) - (Cr^2 - K\cos\gamma)^2 = 0$$

oder

$$(AB - C^2)r^4 - (A + B - 2C\cos\gamma)Kr^2 + K^2\sin^2\gamma = 0.$$

Diese Gleichung bestimmt die Maximal- und Minimalwerthe von r. Für $C^2 - AB < 0$ sind alle vier r reell und zu je zweien entgegengesetzt gleich; für $C^2 - AB > 0$ giebt es nur zwei reelle einander entgegengesetzte r.

4. Von einem gegebenen Punkte $\alpha\beta$ soll die kürzeste oder längste Linie nach einem Punkte xy der Parabel gezogen werden, welche durch die Gleichung

$$y = \frac{x^2}{2c}$$

bestimmt ist.

Man hat in diesem Falle die Gleichungen

$$x - \alpha + (y - \beta)\frac{dy}{dx} = 0, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x}{c},$$

welche geometrisch bedeuten, dass die gesuchten Geraden normal zur Parabel liegen.

Die erste Gleichung wird durch Substitution von $\frac{x}{c}$ statt $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{c(x - \alpha)}{x} = \beta - y,$$

und wenn man den unbekannten Werth beider Seiten dieser Gleichung mit u bezeichnet, so ist

$$x = \frac{c\alpha}{c - u}, \quad y = \beta - u$$

und vermöge der Parabelgleichung

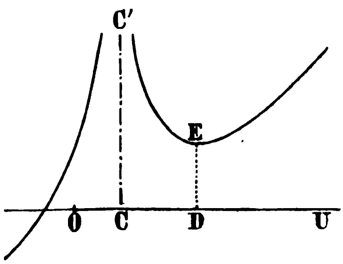
$$\beta = u + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{c\alpha^2}{(c - u)^2}.$$

Aus den Formeln für x und y geht hervor, dass x und y ebenso viel reelle Werthe haben, als die vorstehende cubische Gleichung reelle Werthe von u liefert. Um hierüber unabhängig von der Theorie der cubischen Gleichungen zu entscheiden, betrachte man die allgemeinere Gleichung

$$v = u + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{c\alpha^2}{(c-u)^2}$$

als Gleichung einer in rechtwinkligen Coordinaten u und v ausgedrückten Curve und untersuche deren Verlauf nach den gewöhnlichen Regeln. Man findet, dass diese Curve aus zwei getrennten Zweigen besteht (Fig. 68), deren erster von $u = -\infty$, $v = -\infty$ bis $u = c$, $v = +\infty$ nur steigt, also bei $OC = c$ eine verticale Asymptote OC' hat, während der zweite einen unteren Culminationspunkt E besitzt, dessen Coordinaten sind

Fig. 68.



$$OD = c + \sqrt[3]{c\alpha^2}, \quad DE = c + \tfrac{3}{2}\sqrt[3]{c\alpha^2}.$$

Die Frage, wann $v = \beta$ wird, ist nun einerlei mit der Frage, wie viel Punkte eine in der Höhe β parallel zur Abscissenachse gelegte Gerade mit der betrachteten Curve gemein hat; dann lehrt aber ein Blick auf die Figur, dass die Anzahl der gemeinsamen Punkte 1, 2 oder 3 beträgt, je nachdem β kleiner, gleich oder grösser als DE ist. Die obige cubische Gleichung für u besitzt demnach 1, 2 oder 3 reelle Wurzeln, je nachdem

$$\beta \lesseqgtr c + \tfrac{3}{2}\sqrt[3]{c\alpha^2},$$

oder

$$27\,c\alpha^2 \gtreqless 8(\beta - c)^2$$

ist.

Geometrisch bedeutet diese Unterscheidung, dass von dem Punkte $\alpha\beta$ eine, zwei oder drei Normalen zur Parabel gezogen werden können, je nachdem jener Punkt ausserhalb, auf oder innerhalb der Parabelevolute liegt. Im letzten Falle verschwindet die algebraische Summe der Abscissen der drei Parabelpunkte, nach welchen die Normalen gehen, was ein einfaches Mittel giebt, um zu zwei solchen Normalen die dritte zu construiren.

5. Durch einen gegebenen Punkt $\alpha\beta$ soll die kürzeste oder längste Gerade nach einem Punkte der Ellipse gezogen werden, welche durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

bestimmt ist.

Die gesuchten Linien sind die durch den Punkt $\alpha\beta$ gehenden Normalen der Ellipse; die Coordinaten ihrer Endpunkte müssen ausser der Ellipsengleichung noch folgender Bedingung genügen

$$\frac{a^2(x-\alpha)}{x}=\frac{b^2(y-\beta)}{y}.$$

Bezeichnet man mit u den unbekannten gemeinschaftlichen Werth dieser Quotienten, so hat man

$$x=\frac{a^2\alpha}{a^2-u},\quad y=\frac{b^2\beta}{b^2-u}$$

und vermöge der Ellipsengleichung

$$\frac{a^2\alpha^2}{(a^2-u)^2}+\frac{b^2\beta^2}{(b^2-u)^2}=1.$$

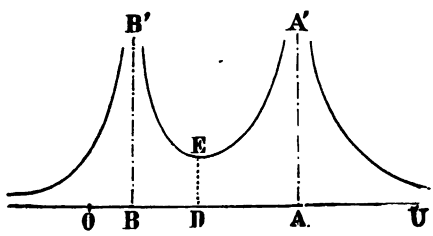
Jede reelle Wurzel dieser biquadratischen Gleichung liefert ein reelles x und ein reelles y; es giebt daher so viel Normalen durch den Punkt $\alpha\beta$, als die vorliegende Gleichung reelle Wurzeln besitzt.

Um die Anzahl derselben rasch zu finden, betrachte man die allgemeinere Gleichung

$$v=\frac{a^2\alpha^2}{(a^2-u)^2}+\frac{b^2\beta^2}{(b^2-u)^2}$$

als Gleichung einer auf rechtwinklige Coordinaten u und v bezogenen Curve. Letztere besteht aus drei getrennten Zweigen (Fig. 69); der erste Zweig hat die Abscissenachse zur horizontalen Asymptote und steigt bis zu einer in der Entfernung $OB=b^2$ liegenden verticalen Asymptote BB'; der zweite Curvenzweig geht von der Asymptote BB' bis zu der in der Entfernung $OA=a^2$ parallelen Asymptote AA' und besitzt einen unteren Culminationspunkt E, dessen Ordinate $DE=\mu$ durch die Formel

Fig. 69.



$$\mu = \frac{(\sqrt[3]{a^2\alpha^2} + \sqrt[3]{b^2\beta^2})^3}{c^4}, \quad (c = \sqrt{a^2 - b^2})$$

bestimmt ist; der dritte Zweig geht von der verticalen Asymptote AA' abwärts und nähert sich der Abscissenachse als seiner Asymptote. Die Frage, wann $v = 1$ wird, ist nun einerlei mit der Frage, in wie viel Punkten eine in der Höhe 1 parallel zur Abscissenachse gelegte Gerade die Curve schneiden wird; man übersieht augenblicklich, dass zwei, drei oder vier Durchschnitte entstehen, je nachdem 1 kleiner, gleich oder grösser als μ ist. Demnach besitzt die biquadratische Gleichung für u zwei, drei oder vier reelle Wurzeln, je nachdem

$$(a\alpha)^{\frac{2}{3}} + (b\beta)^{\frac{2}{3}} \gtreqless c^{\frac{4}{3}}$$

ist, und es gehen also durch den Punkt $\alpha\beta$ zwei, drei oder vier Ellipsennormalen, je nachdem dieser Punkt ausserhalb, auf oder innerhalb der Ellipsenevolute liegt.

6. Man soll die analoge Untersuchung für die Hyperbel ausführen, bei welcher ein ganz ähnliches Resultat zum Vorschein kommt.

II. Wenn $F(x, y, z)$ so zu einem Maximum oder Minimum gemacht werden soll, dass die Bedingung $\varphi(x, y, z) = 0$ erfüllt bleibt, so hat man es mit einer Function von nur zwei unabhängigen Variabelen x, y zu thun, da z eine implicite Function von x und y ist. Mit Rücksicht hierauf bildet man die partiell nach x und y genommenen Differentialquotienten von F, ebenso die von φ, und eliminirt die hierbei vorkommenden Differentialquotienten $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$; man erhält dann drei Bedingungsgleichungen für x, y und z.

7. Auf dem positiven Octanten des Ellipsoids

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$$

soll der Punkt xyz so bestimmt werden, dass der Inhalt des rechtwinkligen Parallelepipeds aus x, y, z am grössten ausfällt.

Es ist hier $F(x, y, z) = xyz$,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y\left(x\frac{\partial z}{\partial x} + z\right) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = x\left(y\frac{\partial z}{\partial y} + z\right) = 0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{c^2 x}{a^2 z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{c^2 y}{b^2 z};$$

substituirt man diese Werthe in die zwei vorhergehenden Gleichungen und beachtet, dass $x = 0$ und $y = 0$ Minima geben, so erhält man

$$x = \frac{a}{\sqrt{3}}, \quad y = \frac{b}{\sqrt{3}}, \quad z = \frac{c}{\sqrt{3}}.$$

Das Maximum von xyz beträgt $\dfrac{abc}{\sqrt{27}}$.

8. An das vorige Ellipsoid ist im Punkte xyz eine Berührungsebene gelegt, welche die Coordinatenachsen OX, OY, OZ in den Punkten U, V, W schneidet; man soll den Berührungspunkt so bestimmen, dass die körperliche Diagonale des Parallelepipeds aus OU, OV, OW ihren Minimalwerth erreicht.

Es handelt sich hier um das Minimum von

$$F(x, y, z) = \frac{a^4}{x^2} + \frac{b^4}{y^2} + \frac{c^4}{z^2};$$

dieses tritt ein für

$$x = \sqrt{\frac{a^3}{a+b+c}}, \quad y = \sqrt{\frac{b^3}{a+b+c}}, \quad z = \sqrt{\frac{c^3}{a+b+c}}.$$

Das Minimum der Diagonale beträgt $a + b + c$.

Bezeichnet S den Schwerpunkt der Fläche des Dreiecks UVW, so gelten die obigen Formeln auch für das Minimum von OS, das also dem arithmetischen Mittel aus a, b, c gleichkommt.

9. Auf dem vorigen Ellipsoide sucht man denjenigen Punkt xyz, für welchen die Fläche des Dreiecks UVW am kleinsten wird.

Giebt man der Ellipsoidgleichung die Form

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1,$$

so handelt es sich um das Minimum von

$$F(x, y, z) = \frac{A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2}{x^2y^2z^2};$$

die Bedingungen $\dfrac{\partial F}{\partial x} = 0$ und $\dfrac{\partial F}{\partial y} = 0$ führen zu den Gleichungen

$$Ax^2(A^2x^2 + B^2y^2) = Cz^2(C^2z^2 + B^2y^2),$$
$$By^2(B^2y^2 + A^2x^2) = Cz^2(C^2z^2 + A^2x^2),$$

die sich symmetrisch schreiben lassen

$$\frac{B^2y^2 + C^2z^2}{Ax^2} = \frac{C^2z^2 + A^2x^2}{By^2} = \frac{A^2x^2 + B^2y^2}{Cz^2}.$$

Bezeichnet T den gemeinschaftlichen Werth dieser drei Quotienten, so ist

$$B^2y^2 + C^2z^2 = TAx^2,$$
$$C^2z^2 + A^2x^2 = TBy^2,$$
$$A^2x^2 + B^2y^2 = TCz^2,$$

man hat demnach, mit der Ellipsoidgleichung zusammen, vier Gleichungen zwischen den Unbekannten x, y, z, T. Die Summe der letzten drei Gleichungen liefert

$$A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2 = \tfrac{1}{2}T;$$

subtrahirt man hiervon der Reihe nach jene drei Gleichungen, so erhält man

$$x = \sqrt{\frac{T}{2A(T+A)}},\quad y = \sqrt{\frac{T}{2B(T+B)}},\quad z = \sqrt{\frac{T}{2C(T+C)}};$$

endlich wird durch Substitution dieser Ausdrücke in die vorhergehende Gleichung

$$\frac{A}{T+A} + \frac{B}{T+B} + \frac{C}{T+C} = 1$$

oder

$$T^3 - (BC + CA + AB)T - 2ABC = 0.$$

Nur die einzige positive Wurzel dieser Gleichung ist hier brauchbar; die vorhergehenden Formeln bestimmen dann x, y, z.

Als Minimum der Dreiecksfläche ergiebt sich der Werth

$$\frac{1}{T}\sqrt{\left(1+\frac{T}{A}\right)\left(1+\frac{T}{B}\right)\left(1+\frac{T}{C}\right)}.$$

10. Unter Voraussetzung positiver A, B, C sei die Gleichung einer Fläche

$$Ax^{\frac{2}{3}} + By^{\frac{2}{3}} + Cz^{\frac{2}{3}} = 1,$$

man sucht wie vorhin das Minimum der Dreiecksfläche, welche von den Spuren der Berührungsebene eingeschlossen wird.

Es ist hier

$$F(x, y, z) = A^2(yz)^{\frac{2}{3}} + B^2(zx)^{\frac{2}{3}} + C^2(xy)^{\frac{2}{3}},$$

und daraus ergeben sich die Bedingungen

$$AB^2x^{\frac{2}{3}} + (A^3 - C^3)y^{\frac{2}{3}} - B^2Cz^{\frac{2}{3}} = 0,$$
$$(B^3 - C^3)x^{\frac{2}{3}} + A^2By^{\frac{2}{3}} \qquad - A^2Cz^{\frac{2}{3}} = 0,$$

man hat also zusammen drei Gleichungen, die in Beziehung auf $x^{\frac{2}{3}}$, $y^{\frac{2}{3}}$, $z^{\frac{2}{3}}$ linear sind. Mit Hilfe der Abkürzungen

$$A' = B^3 + C^3 - A^3,$$
$$B' = C^3 + A^3 - B^3,$$
$$C' = A^3 + B^3 - C^3,$$
$$D = 2(B^3C^3 + C^3A^3 + A^3B^3) - (A^6 + B^6 + C^6)$$

findet man

$$x = \sqrt{\left(\frac{A^2A'}{D}\right)^3}, \quad y = \sqrt{\left(\frac{B^2B'}{D}\right)^3}, \quad z = \sqrt{\left(\frac{C^2C'}{D}\right)^3}$$

und als Minimum der Dreiecksfläche UVW

$$\frac{\sqrt{B'C' + C'A' + A'B'}}{2D} = \frac{1}{2\sqrt{D}}.$$

Ertheilt man der Flächengleichung die Form

$$(ax)^{\frac{2}{3}} + (by)^{\frac{2}{3}} + (cz)^{\frac{2}{3}} = k^{\frac{4}{3}}$$

und versteht unter a, b, c, k positive lineare Constanten, so erhält man als Minimum

$$\frac{1}{2\sqrt{D}} = \frac{k^4}{8\triangle},$$

worin $\triangle$ die Fläche des aus den Seiten a, b, c construirten Dreiecks bezeichnet.

11. Man verlangt den kleinsten und grössten Radiusvector einer centrischen Fläche zweiten Grades, welche durch die Gleichung

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Ezx + 2Fxy = K$$

bestimmt ist.

Da hier $F(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = r$ zu einem Maximum oder Minimum gemacht werden soll, so müssen erstens die Gleichungen gelten

$$x + z\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad y + z\frac{\partial z}{\partial y} = 0;$$

ferner erhält man aus. der Gleichung der Fläche, wenn die Abkürzungen

$$Ax + Fy + Ez = u,$$
$$By + Dz + Fx = v,$$
$$Cz + Ex + Dy = w$$

eingeführt werden,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{u}{w}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{v}{w},$$

also zusammen

$$\frac{u}{x} = \frac{v}{y} = \frac{w}{z}.$$

Wie man sieht, ist diese Aufgabe die nämliche, welche schon in § 23, Nr. 6 gelöst wurde. Benutzt man wieder die Zeichen

$$L = A - \frac{EF}{D}, \quad M = B - \frac{FD}{E}, \quad N = C - \frac{DE}{F},$$

so erhält man zur Bestimmung der gesuchten Werthe von r die folgende Gleichung sechsten Grades

$$1 = \frac{EF}{D} \cdot \frac{r^2}{K - Lr^2} + \frac{FD}{E} \cdot \frac{r^2}{K - Mr^2} + \frac{DE}{F} \cdot \frac{r^2}{K - Nr^2}.$$

12. Von einem gegebenen Punkte $\alpha\beta\gamma$ soll die kürzeste oder längste Gerade nach einem Punkte xyz des elliptischen Paraboloides gezogen werden, dessen Gleichung ist

$$z = \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b}, \quad (a < b).$$

Die Bedingungsgleichungen für den Eintritt des Maximums oder Minimums von

$$F(x, y, z) = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2}$$

sind hier

$$\frac{a(x-\alpha)}{x} = \frac{b(y-\beta)}{y} = \gamma - z,$$

oder, wenn u den gemeinschaftlichen Werth dieser drei Ausdrücke bezeichnet,

$$x = \frac{a\alpha}{a-u}, \quad y = \frac{b\beta}{b-u}, \quad z = \gamma - u.$$

Substituirt man diese Werthe in die Gleichung der Fläche, so erhält man für u die Gleichung fünften Grades

$$\gamma = u + \tfrac{1}{2}\left\{\frac{a\alpha^2}{(a-u)^2} + \frac{b\beta^2}{(b-u)^2}\right\},$$

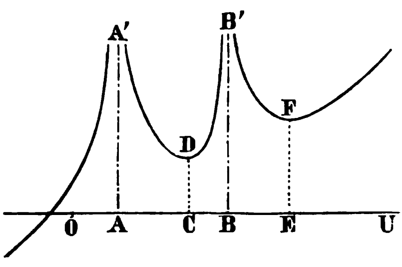
die sich zwar algebraisch nicht auflösen lässt, für welche aber doch die Bedingungen angegeben werden können, unter denen sie eine, zwei, drei, vier oder fünf reelle Wurzeln besitzt.

Man betrachte nämlich die allgemeinere Gleichung

$$v = u + \tfrac{1}{2}\left\{\frac{a\alpha^2}{(a-u)^2} + \frac{b\beta^2}{(b-u)^2}\right\}$$

als Gleichung einer auf rechtwinklige Coordinaten u und v bezogenen ebenen Curve und untersuche mit Hilfe von $\frac{dv}{du} = v'$ und $\frac{d^2v}{du^2} = v''$ den Verlauf dieser Linie. Man findet, dass dieselbe aus drei getrennten Zweigen besteht; der erste Zweig steigt von $u = -\infty$, $v = -\infty$ bis $u = a$, $v = +\infty$, und hat bei $OA = a$ (Fig. 70) eine verticale Asymptote AA'; der zweite Zweig geht von dieser Asymptote abwärts, dann wieder aufwärts bis zu einer zur Abscisse $OB = b$ gehörenden zweiten Asymptote BB'; der dritte Zweig geht von dieser Asymptote abwärts und steigt späterhin wieder bis $u = \infty$, $v = \infty$. Die Curve besitzt demnach zwei untere Culminationspunkte D und F, deren Coordinaten λ_1, μ_1 und λ_2, μ_2 heissen mögen und zwar so, dass die grössere der beiden Ordinaten CD und EF mit μ_2 bezeichnet wird. Nun sind λ_1 und λ_2 die beiden einzigen reellen Wurzeln der Gleichung

Fig. 70.



$$0 = 1 + \frac{a\alpha^2}{(a-\lambda)^3} + \frac{b\beta^2}{(b-\lambda)^3};$$

die beiden zugehörigen μ bestimmen sich durch die Formel

$$\mu = \lambda + \tfrac{1}{2}\left\{\frac{a\alpha^2}{(a-\lambda)^2} + \frac{b\beta^2}{(b-\beta)^2}\right\}.$$

Eine in der Höhe $v = \gamma$ parallel zur Abscissenachse gelegte Gerade hat mit der obigen Curve einen, zwei, drei, vier oder fünf Punkte gemein, je nachdem

$$\gamma < \mu_1, \quad \gamma = \mu_1, \quad \mu_1 < \gamma < \mu_2, \quad \gamma = \mu_2, \; \mu_2 < \gamma$$

ist, und die Gleichung fünften Grades für u liefert, diesen Fällen entsprechend, eine, zwei, drei, vier oder fünf reelle Wurzeln. Damit ist die Anzahl der in jedem Falle möglichen Auflösungen, d. h. die Anzahl der Normalen bestimmt, welche von dem Punkte $\alpha\beta\gamma$ auf das elliptische Paraboloid herabgelassen werden können.

13. Man soll die analoge Untersuchung für das hyperbolische Paraboloid ausführen.

14. Von einem gegebenen Punkte $\alpha\beta\gamma$ soll die längste oder kürzeste Gerade nach einem Punkte xyz des Ellipsoides gezogen werden, dessen Gleichung ist

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (a < b < c).$$

Die Bedingungen für den Eintritt des gesuchten Maximums oder Minimums sind hier

$$\frac{a^2(x-\alpha)}{x} = \frac{b^2(y-\beta)}{y} = \frac{c^2(z-\gamma)}{z},$$

oder, wenn u den gemeinschaftlichen Werth dieser Quotienten bezeichnet,

$$x = \frac{a^2\alpha}{a^2-u}, \quad y = \frac{b^2\beta}{b^2-u}, \quad z = \frac{c^2\gamma}{c^2-u}.$$

Für u erhält man die Gleichung sechsten Grades

$$\frac{a^2\alpha^2}{(a^2-u)^2} + \frac{b^2\beta^2}{(b^2-u)^2} + \frac{c^2\gamma^2}{(c^2-u)^2} = 1.$$

Um die Anzahl ihrer reellen Wurzeln zu ermitteln, betrachte man die Gleichung

$$v = \frac{a^2\alpha^2}{(a^2-u)^2} + \frac{b^2\beta^2}{(b^2-u)^2} + \frac{c^2\gamma^2}{(c^2-u)^2}$$

als Gleichung einer ebenen Curve und untersuche den Verlauf der letzteren. Die Curve besteht aus vier getrennten Zweigen (Fig. 71) mit drei verticalen Asymptoten in den Entfernungen $OA = a^2$, $OB = b^2$, $OC = c^2$ und mit zwei unteren Culminationspunkten E und G, deren Coordinaten λ_1, μ_1 und λ_2, μ_2 heissen mögen, wobei $\mu_2 > \mu_1$ vorausgesetzt wird. Die Abscissen λ_1 und λ_2 sind die beiden einzigen reellen Wurzeln der Gleichung

$$\frac{a^2\alpha^2}{(a^2-\lambda)^3}+\frac{b^2\beta^2}{(b^2-\lambda)^3}+\frac{c^2\gamma^2}{(c^2-\lambda)^3}=0,$$

und die zugehörigen μ bestimmen sich durch die Formel

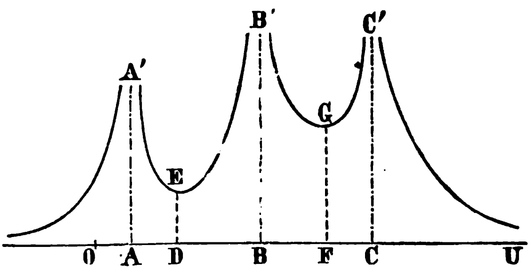
$$\mu=\frac{a^2\alpha^2}{(a^2-\lambda)^2}+\frac{b^2\beta^2}{(b^2-\lambda)^2}+\frac{c^2\gamma^2}{(c^2-\lambda)^2}.$$

Eine in der Höhe $v=1$ parallel zur Abscissenachse gelegte Gerade hat nun mit der betrachteten Curve zwei, drei, vier, fünf oder sechs Punkte gemein, je nachdem

$$1<\mu_1,\quad 1=\mu_1,\quad \mu_1<1<\mu_2,\quad 1=\mu_2,\quad \mu_2<1$$

ist und die bicubische Gleichung für u liefert, diesen Fällen entsprechend, zwei, drei, vier, fünf oder sechs reelle Wurzeln. Damit ist die Anzahl der in jedem Falle möglichen Auflösungen, d. h. die Anzahl der Normalen bestimmt, welche von dem Punkte $\alpha\beta\gamma$ auf das Ellipsoid herabgelassen werden können.

Fig. 71.



15. Man soll die analoge Untersuchung für das einfache Hyperboloid ausführen.

16. Es wird eine gleiche Untersuchung über das getheilte Hyperboloid verlangt.

17. Zwei Parabeln sind gegeben durch ihre Gleichungen

$$y=\frac{x^2}{2a},\quad \eta^2=2b\xi;$$

man soll auf der ersten Parabel den Punkt P, auf der zweiten den Punkt Π so bestimmen, dass die Entfernung $P\Pi$ ein Maximum oder Minimum wird.

Nimmt man x und ξ als unabhängige Variabele, so hat man für das Maximum oder Minimum von $P\Pi$ die Bedingungen

$$x-\xi+(x-\eta)\frac{dy}{dx}=0,\quad x-\xi+(y-\eta)\frac{d\eta}{d\xi}=0;$$

die hieraus folgende Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\eta}{d\xi}$$

zeigt, dass $P\Pi$ eine gemeinschaftliche Normale beider Parabeln sein muss. Vermöge der Werthe von $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d\eta}{d\xi}$ wird die letzte Gleichung

$$\frac{x}{a} = \frac{b}{\eta}$$

und wenn man den gemeinschaftlichen Betrag beider Quotienten mit u bezeichnet, so ist

$$x = au, \quad \eta = \frac{b}{u},$$

$$y = \frac{au^2}{2}, \quad \xi = \frac{b}{2u^2};$$

nach Substitution dieser Werthe verwandelt sich die Gleichung

$$x - \xi + (y - \eta)\frac{x}{a} = 0$$

in die folgende zur Bestimmung von u dienende Gleichung

$$u^5 + 2u^3 - 2\frac{b}{a}u^2 - \frac{b}{a} = 0.$$

Um die Anzahl ihrer reellen Wurzeln zu finden, denke man sich

$$v = \frac{u^5 + 2u^3}{2u^2 + 1} \text{ und } v = \frac{b}{a}$$

als Gleichungen einer Curve und einer in der Höhe $\frac{b}{a}$ parallel zur u-Achse gelegten Geraden; die Discussion der Curve zeigt, dass ihre Ordinaten von $v = -\infty$ bis $v = +\infty$ continuirlich wachsen, dass also der Specialfall $v = \frac{b}{a}$ nur einmal vorkommen kann. Die beiden Parabeln haben daher jederzeit eine, aber keine weitere gemeinschaftliche Normale.

Für $b = a$ wird $u = 1$, $x = a$, $y = \frac{1}{2}a$, $\xi = \frac{1}{2}a$, $\eta = a$.

18. Eine Ellipse und eine gleichseitige Hyperbel sind gegeben durch ihre Gleichungen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ und } \xi\eta = k^2;$$

man soll auf der ersten Curve den Punkt P, auf der zweiten den Punkt Π so bestimmen, dass die Entfernung $P\Pi$ ein Maximum oder Minimum wird.

Betrachtet man x und ξ als unabhängige Variabele, so hat man für das Minimum von $P\Pi$

$$x - \xi + (y - \eta)\frac{dy}{dx} = 0, \quad x - \xi + (y - \eta)\frac{d\eta}{d\xi} = 0,$$

mithin

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\eta}{d\xi},$$

woraus hervorgeht, daſs die Gerade $P\Pi$ normal auf beiden Curven sein muss. Zufolge der Werthe von $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d\eta}{d\xi}$ ist weiter

$$\frac{a^2(x-\xi)}{x} = \frac{b^2(y-\eta)}{y}, \quad \frac{a^2}{x\xi} = \frac{b^2}{y\eta}.$$

Nennt man u den gemeinschaftlichen Werth der beiden ersten, v den gemeinschaftlichen Werth der beiden letzten Quotienten, so findet man

$$x^2 = \frac{a^4}{(a^2-u)v}, \quad y^2 = \frac{b^4}{(b^2-u)v},$$

$$\xi^2 = \frac{a^2-u}{v}, \quad \eta^2 = \frac{b^2-u}{v},$$

und aus den Gleichungen der Curven

$$v = \frac{a^2}{a^2-u} + \frac{b^2}{b^2-u},$$

$$v^2 = \frac{(a^2-u)(b^2-u)}{k^4}.$$

Die Elimination von v würde eine bicubische Gleichung für u liefern, aus der sich u, dann v, x, y, ξ, η finden liessen; man thut aber besser, die vorstehenden Gleichungen als Gleichungen zweier in rechtwinkligen Coordinaten u und v ausgedrückten Curven zu betrachten und deren Durchschnitt aufzusuchen. Unter der Voraussetzung $a < b$ existiren nur zwei reelle Durchschnitte, für deren Coordinaten u_1, v_1, u_2, v_2 folgende Bemerkungen gelten:

$$-\infty < u_1 < a^2, \quad b^2 < u_2 < +\infty,$$

$$v_1 > 0, \qquad v_2 < 0.$$

Die weitere Discussion über die Realität von x, y, ξ, η bietet keine Schwierigkeit.

19. Ein Ellipsoid und eine Fläche dritten Grades sind gegeben durch ihre Gleichungen

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \text{ und } \xi\eta\zeta=k^3;$$

man soll auf der ersten Fläche den Punkt P, auf der zweiten den Punkt Π so bestimmen, dass die Entfernung $P\Pi$ ein Maximum oder Minimum wird.

Nimmt man x, y, ξ, η als unabhängige Variabele, so hat man die vier Gleichungen

$$x-\xi+(z-\zeta)\frac{\partial z}{\partial x}=0,\quad y-\eta+(z-\zeta)\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

$$x-\xi+(z-\zeta)\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}=0,\quad y-\eta+(z-\zeta)\frac{\partial \zeta}{\partial \eta}=0;$$

die hieraus folgenden Relationen

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial \zeta}{\partial \xi},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial \zeta}{\partial \eta}$$

zeigen, dass $P\Pi$ eine gemeinschaftliche Normale beider Flächen sein muss. Vermöge der Werthe der vier auftretenden partiellen Differentialquotienten erhält man weiter

$$\frac{a^2(x-\xi)}{x}=\frac{b^2(y-\eta)}{y}=\frac{c^2(z-\zeta)}{z},$$

$$\frac{a^2}{x\xi}=\frac{b^2}{y\eta}=\frac{c^2}{z\zeta},$$

oder, wenn man u den gemeinschaftlichen Werth der ersten drei, v den der letzten drei Brüche nennt,

$$x^2=\frac{a^4}{(a^2-u)v},\quad y^2=\frac{b^4}{(b^2-u)v},\quad z^2=\frac{c^4}{(c^2-u)v},$$

$$\xi^2=\frac{a^2-u}{v},\quad \eta^2=\frac{b^2-u}{v},\quad \zeta^2=\frac{c^2-u}{v}.$$

Aus den Gleichungen der Flächen ergeben sich nun für u und v folgende Gleichungen

$$v=\frac{a^2}{a^2-u}+\frac{b^2}{b^2-u}+\frac{c^2}{c^2-u},$$

$$v^3=\frac{(a^2-u)(b^2-u)(c^2-u)}{k^3},$$

welche für u allein eine Gleichung zwölften Grades liefern. Betrachtet man aber die vorstehenden Gleichungen als Gleichungen zweier sich schneidenden Curven, so findet man leicht, dass es für u und v nur vier reelle Werthepaare giebt, nämlich, wenn $a < b < c$ vorausgesetzt wird,

$$-\infty < u_1 < a^2 < u_2 < b^2 < u_3 < c^2 < u_4 < +\infty,$$

$$v_1 > 0, \quad v_2 < 0, \quad v_3 > 0, \quad v_4 < 0.$$

Die weitere Discussion über die Realität der entsprechenden $x, y, z, \xi, \eta, \zeta$ bietet keine Schwierigkeit.

Capitel XI.

Unendliche Reihen.

§ 35.

Die Entstehung unendlicher Reihen.

Die Summe der aus n Gliedern bestehenden Reihe $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1}$ sei bekannt und heisse S_n; trifft es sich nun, dass S_n bei unendlich wachsenden n gegen einen bestimmten endlichen Grenzwerth S convergirt, so geht die Gleichung

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1}$$

in die folgende über

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots \textit{ in inf.},$$

dann heisst die Reihe convergent, S ihre Summe. Ist dagegen $Lim\, S_n$ keine bestimmte Grösse, so heisst die Reihe divergent und sie hat dann keine Summe.

1. Um die Reihe

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

zu summiren, benutze man die identische Gleichung

$$\frac{1}{m(m+1)} = \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1};$$

man findet

$$1 - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

und für $n = \infty$

$$1 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots$$

2. Auf ähnliche Art sollen die folgenden Gleichungen bewiesen werden:

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{x+n}=\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\cdots+\frac{1}{(x+n-1)(x+n)},$$

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}+\cdots$$

3. Mittelst der identischen Gleichung

$$\frac{1}{(x+m)(x+m+1)(x+m+2)}$$
$$=\tfrac{1}{2}\left\{\frac{1}{(x+m)(x+m+1)}-\frac{1}{(x+m+1)(x+m+2)}\right\}$$

erhält man

$$\tfrac{1}{2}\left\{\frac{1}{x(x+1)}-\frac{1}{(x+n)(x+n+1)}\right\}$$
$$=\frac{1}{x(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}+\cdots$$
$$\cdots+\frac{1}{(x+n-1)(x+n)(x+n+1)},$$

$$\frac{1}{2x(x+1)}=\frac{1}{x(x+1)(x+2)}$$
$$+\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)(x+4)}+\cdots$$

4. Setzt man in der identischen Gleichung

$$\frac{1}{z-1}-\frac{2}{z^2-1}=\frac{1}{z+1}$$

der Reihe nach $z=x,\ x^2,\ x^4,\ x^8, \ldots x^{2^{n-1}}$, multiplicirt die entstehenden Gleichungen der Reihe nach mit $1,\ 2,\ 4,\ 8, \ldots 2^{n-1}$ und schreibt kurz p für 2^{n-1}, so erhält man durch Addition

$$\frac{1}{x-1}-\frac{2p}{x^{2p}-1}$$
$$=\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x^2+1}+\frac{4}{x^4+1}+\cdots+\frac{p}{x^p+1}.$$

Für $n=\infty$ wird hieraus unter der Bedingung $x>1$

$$\frac{1}{x-1}=\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x^2+1}+\frac{4}{x^4+1}+\frac{8}{x^8+1}+\cdots;$$

für $x \leqq 1$ divergirt die Reihe.

5. Setzt man in der obigen identischen Gleichung der Reihe nach $z=x^{\frac{1}{2}},\ x^{\frac{1}{4}},\ x^{\frac{1}{8}}, \ldots x^{\frac{1}{q}}$, wo $q=2^n$ ist, so erhält man auf ähnliche Weise

$$\frac{1}{q\left(x^{\frac{1}{q}}-1\right)}-\frac{1}{x-1}$$

$$=\tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}+1}+\tfrac{1}{4}\cdot\frac{1}{x^{\frac{1}{4}}+1}+\tfrac{1}{8}\cdot\frac{1}{x^{\frac{1}{8}}+1}+\cdots+\frac{1}{q}\cdot\frac{1}{x^{\frac{1}{q}}+1}$$

und für $n=\infty$, falls x von der Einheit verschieden ist,

$$\frac{1}{lx}-\frac{1}{x-1}$$

$$=\tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}+1}+\tfrac{1}{4}\cdot\frac{1}{x^{\frac{1}{4}}+1}+\tfrac{1}{8}\cdot\frac{1}{x^{\frac{1}{8}}+1}+\cdots$$

Abgesehen von ihrer Herleitung gilt diese Gleichung auch für $x=1$, denn nach Nr. 22 in § 27, II erhält dann die linke Seite den Werth $\frac{1}{2}$, der (zufolge Nr. 11, s. u.) auch die Summe der rechts stehenden Reihe ist.

6. Mit Hilfe der goniometrischen Formel

$$\tfrac{1}{2}\cot u-\cot 2u=\tfrac{1}{2}\tan u$$

erhält man für $u=\frac{1}{2}x,\ \frac{1}{4}x,\ \frac{1}{8}x,\cdots\frac{1}{2^n}x$ und für $2^n=q$

$$\frac{1}{q}\cot\frac{x}{q}-\cot x=\tfrac{1}{2}\tan\frac{x}{2}+\tfrac{1}{4}\tan\frac{x}{4}+\tfrac{1}{8}\tan\frac{x}{8}+\cdots+\frac{1}{q}\tan\frac{x}{q},$$

woraus für $n=\infty$ folgt

$$\frac{1}{x}-\cot x=\tfrac{1}{2}\tan\frac{x}{2}+\tfrac{1}{4}\tan\frac{x}{4}+\tfrac{1}{8}\tan\frac{x}{8}+\cdots$$

7. Aus der identischen Gleichung

$$\operatorname{arc\,tan}\frac{x}{m}-\operatorname{arc\,tan}\frac{x}{m+2}=\operatorname{arc\,tan}\frac{2x}{x^2+m(m+2)}$$

erhält man durch Addition der für $m=0,1,2,\ldots n$ entstehenden Gleichungen und für $n=\infty$

$$\frac{\pi}{2}+\operatorname{arc\,tan}x=\operatorname{arc\,tan}\frac{2}{x}+\operatorname{arc\,tan}\frac{2x}{x^2+1\cdot3}+\operatorname{arc\,tan}\frac{2x}{x^2+2\cdot4}$$
$$+\operatorname{arc\,tan}\frac{2x}{x^2+3\cdot5}+\cdots$$

Der Specialfall $x=1$ giebt

$$\frac{3\pi}{4}=\operatorname{arc\,tan}\frac{2}{1^2}+\operatorname{arc\,tan}\frac{2}{2^2}+\operatorname{arc\,tan}\frac{2}{3^2}+\cdots$$

8. Mittelst der Gleichung

$$arc\,tan\frac{x}{m} - arc\,tan\frac{x}{m+1} = arc\,tan\frac{x}{x^2 + m(m+1)}$$

findet sich analog

$$\frac{\pi}{2} = arc\,tan\frac{1}{x} + arc\,tan\frac{x}{x^2 + 1\cdot 2} + arc\,tan\frac{x}{x^2 + 2\cdot 3} + \cdots$$

und speciell für $x = \frac{1}{2}$

$$\frac{\pi}{2} = arc\,tan\frac{2}{1^2} + arc\,tan\frac{2}{3^2} + arc\,tan\frac{2}{5^2} + \cdots$$

Zieht man diese Gleichung von der letzten Gleichung in Nr. 7 ab, so bleibt

$$\frac{\pi}{4} = arc\,tan\frac{1}{2\cdot 1^2} + arc\,tan\frac{1}{2\cdot 2^2} + arc\,tan\frac{1}{2\cdot 3^2} + \cdots$$

9. Falls die zu Anfang dieses Paragraphen betrachteten Summanden u_0, u_1, u_2, etc. Logarithmen sind, etwa $u_m = lv_m$, so führt die Gleichung

$$S = lv_0 + lv_1 + lv_2 + \cdots \textit{in inf.}$$

zur Werthbestimmung eines unendlichen Productes, nämlich

$$e^S = v_0 \cdot v_1 \cdot v_2 \ldots \textit{in inf.}$$

Beispielsweise folgt aus

$$l(1 - z^2) - l(1 - z) = l(1 + z)$$

die Summirung

$$- l(1 - \xi) + l(1 - \xi^{2p})$$

$$= l(1 + \xi) + l(1 + \xi^2) + l(1 + \xi^4) + l(1 + \xi^8) + \cdots + l(1 + \xi^p),$$

worin $p = 2^{n-1}$ ist; für $n = \infty$ wird unter der Bedingung $\xi^2 < 1$

$$l\left(\frac{1}{1 - \xi}\right) = l(1 + \xi) + l(1 + \xi^2) + l(1 + \xi^4) + \cdots$$

oder

$$\frac{1}{1 - \xi} = (1 + \xi)(1 + \xi^2)(1 + \xi^4)(1 + \xi^8)\ldots,$$

wie man auch direct mittelst der Gleichung

$$\frac{1 - z^2}{1 - z} = 1 + z$$

finden kann.

Auf ganz analoge Weise ergiebt sich für $2^n = q$

$$l(1-\xi) - l\{q(1-\xi^{\frac{1}{q}})\}$$

$$= l\left(\frac{1+\xi^{\frac{1}{2}}}{2}\right) + l\left(\frac{1+\xi^{\frac{1}{4}}}{2}\right) + l\left(\frac{1+\xi^{\frac{1}{8}}}{2}\right) + \cdots + l\left(\frac{1+\xi^{\frac{1}{q}}}{2}\right)$$

und für $n = \infty$, falls $0 < \xi < 1$ ist,

$$l(1-\xi) - l\{-l\xi\} = l\left(\frac{1+\xi^{\frac{1}{2}}}{2}\right) + l\left(\frac{1+\xi^{\frac{1}{4}}}{2}\right) + l\left(\frac{1+\xi^{\frac{1}{8}}}{2}\right) + \cdots$$

oder

$$\frac{1-\xi}{l\left(\frac{1}{\xi}\right)} = \frac{1+\xi^{\frac{1}{2}}}{2} \cdot \frac{1+\xi^{\frac{1}{4}}}{2} \cdot \frac{1+\xi^{\frac{1}{8}}}{2} \cdots$$

Beträgt ξ mehr als die Einheit, so wird

$$\frac{\xi-1}{l\xi} = \frac{1+\xi^{\frac{1}{2}}}{2} \cdot \frac{1+\xi^{\frac{1}{4}}}{2} \cdot \frac{1+\xi^{\frac{1}{8}}}{2} \cdots;$$

auch für $\xi = 1$ bleiben diese Ergebnisse giltig.

Differenzirt man die Logarithmen der gefundenen unendlichen Producte nach ξ und setzt dann $\xi = \frac{1}{x}$, so kommt man auf die in 4 und 5 angegebenen Resultate zurück.

10. Für $2^n = q$ lässt sich aus der Gleichung

$$l\sin z - l(2\sin\tfrac{1}{2}z) = l\cos\tfrac{1}{2}z$$

die folgende Summirung herleiten

$$l\sin x - l\left(q\sin\frac{x}{q}\right) = l\cos\frac{x}{2} + l\cos\frac{x}{4} + l\cos\frac{x}{8} + \cdots + l\cos\frac{x}{q},$$

welche für $n = \infty$ übergeht in

$$l\sin x - lx = l\cos\frac{x}{2} + l\cos\frac{x}{4} + l\cos\frac{x}{8} + \cdots$$

oder

$$\frac{\sin x}{x} = \cos\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{4} \cdot \cos\frac{x}{8} \cdots$$

Dasselbe Resultat ergiebt sich direct aus der Formel

$$\frac{\sin z}{2\sin\frac{1}{2}z} = \cos\tfrac{1}{2}z.$$

Differenzirt man den Logarithmus des vorigen Products nach x, so kommt man auf das in Nr. 6 entwickelte Resultat zurück

11. Die Summenformel für die geometrische Progression, nämlich

$$\frac{1-x^n}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{n-1}$$

giebt bei unendlich wachsenden n

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots,$$
$$-1 < x < +1;$$

für alle der zuletzt angegebenen Bedingung nicht genügenden x divergirt die Reihe.

12. Multiplicirt man die vorhergehende Summenformel mit x und differenzirt das Product, so entsteht

$$\frac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + nx^{n-1}$$

und bei unendlich wachsenden n*

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots,$$
$$-1 < x < +1.$$

13. Multiplicirt man die vorhergehende Summe der endlichen Reihe mit x und differenzirt, so erhält man

$$\frac{1 + x - (n+1)^2 x^n + (2n^2 + 2n - 1)x^{n+1} - n^2 x^{n+2}}{(1-x)^3}$$
$$= 1 + 4x + 9x^2 + 16x^3 + \cdots + n^2 x^{n-1}$$

und für $n = \infty$

$$\frac{1+x}{(1-x)^3} = 1 + 4x + 9x^2 + 16x^3 + \cdots,$$
$$-1 < x < +1.$$

Auf analoge Weise kann man viele ähnliche Reihensummen ableiten.

14. Es bedeute U die unbekannte Summe der aus n Termen bestehenden Reihe

---

* Zur Ermittelung des Grenzwerthes von $\psi(n)$ kann man sich hier und in mehreren späteren Fällen des Satzes bedienen, dass $\psi(n)$ gegen die Null convergirt oder unendlich wächst, je nachdem der absolute Werth von $Lim \frac{\psi(n+1)}{\psi(n)}$ weniger oder mehr als die Einheit beträgt. Ist der letztere Grenzwerth $= 1$, so muss eine besondere Untersuchung über $Lim\, \psi(n)$ vorgenommen werden.

$$U = 1 + x\cos\theta + x^2\cos 2\theta + x^3\cos 3\theta + \cdots + x^{n-1}\cos(n-1)\theta;$$

um U zu finden, multiplicire man beiderseits mit

$$1 - 2x\cos\theta + x^2$$

und beachte rechter Hand die Gleichung

$$2\cos k\theta\cos\theta = \cos(k-1)\theta + \cos(k+1)\theta,$$

damit erhält man nach gehöriger Hebung

$$(1 - 2x\cos\theta + x^2)U = 1 - x\cos\theta - x^n\cos n\theta + x^{n+1}\cos(n-1)\theta.$$

Hieraus ergiebt sich U und es ist also

$$\frac{1 - x\cos\theta - x^n\cos n\theta + x^{n+1}\cos(n-1)\theta}{1 - 2x\cos\theta + x^2}$$

$$= 1 + x\cos\theta + x^2\cos 2\theta + x^3\cos 3\theta + \cdots + x^{n-1}\cos(n-1)\theta.$$

Durch Uebergang zur Grenze für unendlich wachsende n wird hieraus

$$\frac{1 - x\cos\theta}{1 - 2x\cos\theta + x^2} = 1 + x\cos\theta + x^2\cos 2\theta + x^3\cos 3\theta + \cdots,$$
$$-1 < x < +1.$$

Eine Folge hiervon ist die Gleichung

$$\frac{1 - x^2}{1 - 2x\cos\theta + x^2} = 1 + 2(x\cos\theta + x^2\cos 2\theta + x^3\cos 3\theta + \cdots),$$
$$-1 < x < +1.$$

15. Behandelt man auf ganz ähnliche Weise die Gleichung

$$V = x\sin\theta + x^2\sin 2\theta + x^3\sin 3\theta + \cdots + x^{n-1}\sin(n-1)\theta,$$

so erhält man zunächst

$$(1 - 2x\cos\theta + x^2)V = x\sin\theta - x^n\sin n\theta + x^{n+1}\sin(n-1)\theta,$$

mithin

$$\frac{x\sin\theta - x^n\sin n\theta + x^{n+1}\sin(n-1)\theta}{1 - 2x\cos\theta + x^2}$$

$$= x\sin\theta + x^2\sin 2\theta + x^3\sin 3\theta + \cdots + x^{n-1}\sin(n-1)\theta.$$

Für $n = \infty$ giebt dies

$$\frac{x\sin\theta}{1 - 2x\cos\theta + x^2} = x\sin\theta + x^2\sin 2\theta + x^3\sin 3\theta + \cdots,$$
$$-1 < x < +1,$$

wo beiderseits x gehoben werden kann.

16. Wir knüpfen hieran einige Bemerkungen über die gebrochene Function

$$\frac{1}{1 - 2\alpha z + \beta z^2}.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$a = \alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta}, \quad b = \alpha - \sqrt{\alpha^2 - \beta},$$

wobei aber $\alpha^2 > \beta$ sein muss, wenn a und b reell bleiben sollen, so ist $a + b = 2\alpha$, $ab = \beta$, mithin

$$\frac{1}{1 - 2\alpha z + \beta z^2} = \frac{1}{1 - (a+b)z + abz^2} = \frac{1}{a-b}\left\{\frac{a}{1-az} - \frac{b}{1-bz}\right\}.$$

Im Fall nun die absoluten Werthe von az und bz echte Brüche sind, kann rechter Hand die Formel

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots,$$
$$-1 < x < +1$$

sowohl für $x = az$, als für $x = bz$ angewendet werden; hierdurch entsteht ein Resultat von der Form

$$\frac{1}{1 - 2\alpha z + \beta z^2} = 1 + C_1 z + C_2 z^2 + C_3 z^3 + \cdots,$$

und zwar ist

$$C_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b} = \frac{(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta})^{n+1} - (\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \beta})^{n+1}}{2\sqrt{\alpha^2 - \beta}}.$$

Zur weiteren Entwickelung des Zählers lässt sich der binomische Satz für ganze positive Exponenten benutzen, wodurch entsteht

$$C_n = (n+1)_1 \alpha^n + (n+1)_3 \alpha^{n-2}(\alpha^2 - \beta) + (n+1)_5 \alpha^{n-4}(\alpha^2 - \beta)^2 + (n+1)_7 \alpha^{n-6}(\alpha^2 - \beta)^3 + \cdots$$

also

$$C_1 = 2\alpha, \quad C_2 = 4\alpha^2 - \beta, \quad C_3 = 8\alpha^3 - 4\alpha\beta, \ldots$$

Unter der Bedingung, dass gleichzeitig

$$\alpha^2 > \beta, \quad [(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta})z]^2 < 1 \text{ und } [(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \beta})z]^2 < 1$$

ist, gilt also die Gleichung

$$\frac{1}{1 - 2\alpha z + \beta z^2} = 1 + 2\alpha z + (4\alpha^2 - \beta)z^2 + (8\alpha^3 - 4\alpha\beta)z^3 + \cdots$$

Die vorigen Schlüsse verlieren ihre Anwendbarkeit, wenn $\alpha^2 < \beta$ ist, mithin a und b imaginär werden. Da in diesem Falle β positiv und $\sqrt{\beta} > \alpha$ sein muss, so kann man

$$\frac{\alpha}{\sqrt{\beta}} = \cos\theta, \quad z = \frac{x}{\sqrt{\beta}}$$

setzen und es wird dann

$$\frac{1}{1 - 2\alpha z + \beta z^2} = \frac{1}{1 - 2x\cos\theta + x^2}.$$

Hier lässt sich unter der Bedingung $x^2 < 1$ die letzte Formel in Nr. 15 anwenden, wodurch entsteht

$$\frac{1}{1 - 2\alpha z + \beta z^2} = \frac{1}{\sin\theta}\{\sin\theta + x\sin 2\theta + x^2\sin 3\theta + x^3\sin 4\theta + \cdots\}$$
$$= 1 + C_1 z + C_2 z^2 + C_3 z^3 + \cdots$$

Der Werth von C_n ist

$$C_n = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}\sqrt{\beta^n}$$

oder nach einer bekannten Formel (Compend. d. h. Anal, § 7, Nr. 15)

$$C_n = \sqrt{\beta^n}\{(n+1)_1\cos^n\theta - (n+1)_3\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta$$
$$+ (n+1)_5\cos^{n-4}\theta\sin^4\theta - \cdots\};$$

durch Substitution der Werthe

$$\cos\theta = \frac{\alpha}{\sqrt{\beta}}, \quad \sin\theta = \frac{\sqrt{\beta - \alpha^2}}{\sqrt{\beta}}$$

wird hieraus

$$C_n = (n+1)_1\alpha^n - (n+1)_3\alpha^{n-2}(\beta - \alpha^2) + (n+1)_5\alpha^{n-4}(\beta - \alpha^2)^2$$
$$-(n+1)_7\alpha^{n-6}(\beta - \alpha^2)^3 + \cdots$$

Unter den Bedingungen, dass gleichzeitig

$$\alpha^2 < \beta < \frac{1}{z^2}$$

ist, gilt also die Gleichung

$$\frac{1}{1 - 2\alpha z + \beta z^2} = 1 + 2\alpha z + (4\alpha^2 - \beta)z^2 + (8\alpha^3 - 4\alpha\beta)z^3 + \cdots$$

Die Coefficienten von z, z^2, z^3 etc. sind hier dieselben wie früher, die Bedingungen für die Giltigkeit der Gleichung sind aber andere.

Wäre endlich $\beta = \alpha^2$, so würde man für $\alpha z = x$ auf eine frühere Summenformel zurückkommen.

§ 36.

Die Convergenz und Divergenz der Reihen.

Wenn eine gegebene unendliche Reihe nur positive Terme enthält, so dienen folgende Sätze zur Beurtheilung ihrer Convergenz oder Divergenz.

a) Die Reihe convergirt, sobald von einer bestimmten Stelle an ihre Terme kleiner sind als die gleichstelligen Terme einer anderen als convergent bekannten Reihe; sie divergirt dagegen, wenn ihre Terme grösser sind als die entsprechenden Terme einer bekannten divergirenden Reihe.

b) Die Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$$

convergirt oder divergirt, je nachdem

$$Lim \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

weniger oder mehr als die Einheit beträgt.

c) Im Fall der genannte Grenzwerth $= 1$ ist, giebt das vorige Kennzeichen keine Entscheidung; man untersuche dann

$$Lim \left\{ n\left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right)\right\};$$

je nachdem dieser Grenzwerth mehr oder weniger als die Einheit ausmacht, convergirt oder divergirt die Reihe.

d) Sehr häufig lässt sich mit Vortheil der Satz anwenden, dass die Reihen

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + \cdots$$

und

$$u_1 + 2u_2 + 4u_4 + 8u_8 + 16u_{16} + \cdots$$

gleichzeitig convergiren und divergiren, wie aus folgenden Schlüssen hervorgeht. Wegen $u_1 > u_2 > u_3 \ldots$ ist

$$\begin{aligned}
2u_4 &< u_2 + u_3 &&< 2u_2,\\
4u_8 &< u_4 + \cdots + u_7 &&< 4u_4,\\
8u_{16} &< u_8 + \cdots + u_{15} &&< 8u_8,\\
&\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

mithin durch Addition und allseitige Hinzufügung von u_1

$$\tfrac{1}{2}u_1 - u_2 + \tfrac{1}{2}(u_1 + 2u_2 + 4u_4 + 8u_8 + \cdots)$$
$$< u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + \cdots <$$
$$u_1 + 2u_2 + 4u_4 + 8u_8 + 16u_{16} + \cdots;$$

diese Ungleichung liefert sofort den Beweis, dass die Reihe $u_1 + u_2 + u_3 +$ etc. convergirt oder divergirt, je nachdem die Reihe $u_1 + 2u_2 + 4u_4 +$ etc. convergent oder divergent ist.

Wenn eine Reihe aus Termen mit alternirenden Vorzeichen besteht, mithin unter der Form

$$u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \cdots$$

enthalten ist, so convergirt sie immer, sobald von einer bestimmten Stelle an jeder Term grösser als der nächste und wenn zugleich $\mathit{Lim}\, u_n = 0$ ist.

Beispiele.

1. Die Reihe
$$x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \cdots$$
convergirt für $x^2 < 1$ und divergirt in jedem anderen Falle.

2. Die Reihe
$$\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots$$
convergirt für $x^2 < 1$ und divergirt für $x^2 > 1$. Im Falle $x^2 = 1$ ist zu unterscheiden, ob $x = -1$ oder $x = +1$ ist. Für $x = -1$ convergirt die Reihe, für $x = +1$ führen folgende Schlüsse zur Entscheidung. Die Ungleichungen

$$\frac{h}{a+h} < l(a+h) - la, \quad \frac{h}{a} > l(a+h) - la$$

geben, wenn in der ersten $h = 1$, $a = z - 1$, in der zweiten $h = 1$, $a = z$ gesetzt wird,

$$l(z+1) - lz < \frac{1}{z} < lz - l(z-1),$$

mithin für $z = 2, 3, \ldots n$ und Addition nebst Hinzufügung der Einheit

$$1 - l2 + l(n+1) < \tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} < 1 + ln;$$

daraus erhellt unmittelbar die Divergenz der Reihe.

3. Die Reihe

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots$$

convergirt für jedes endliche x. Wenn x nicht eine kleine Zahl ist, so wachsen anfangs die Terme (wovon schon $x = 5$ ein Beispiel giebt); es lässt sich aber auf folgende Weise die Stelle im Voraus bestimmen, von welcher ab die Reihe schneller convergirt als eine geometrische Progression.

Wendet man den Satz

$$f(a+h) - f(a) = hf'(a+\vartheta h), \quad 0 < \vartheta < 1$$

auf die Function $f(x) = xlx$ an, so erhält man

$$(a+h)l(a+h) - ala = h[1 + l(a+\vartheta h)]$$

und für die extremen Werthe $\vartheta = 0$ und $\vartheta = 1$

$$(a+h)l(a+h) - ala > h[1 + la],$$
$$(a+h)l(a+h) - ala < h[1 + l(a+h)].$$

In der ersten Ungleichung setze man $h = 1$, $a = z$, in der zweiten $h = 1$, $a = z - 1$, es wird dann

$$zlz - (z-1)l(z-1) - 1 < lz < (z+1)l(z+1) - zlz - 1.$$

Durch Addition aller für $z = 2, 3, 4, \ldots n$ hieraus entstehenden Ungleichungen folgt

$$nln - (n-1) < l(2 \,.\, 3 \ldots n) < (n+1)l(n+1) - 2l2 - (n-1)$$

oder

$$\frac{n^n}{e^{n-1}} < 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots n < \frac{(n+1)^{n+1}}{4e^{n-1}},$$

mithin

$$\frac{x^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} < \frac{1}{e}\left(\frac{ex}{n}\right)^n.$$

Bezeichnet k die ganze Zahl, welche nächstgrösser als ex ist, so wird

$$\frac{x^k}{1 \,.\, 2 \ldots k} + \frac{x^{k+1}}{1 \,.\, 2 \ldots (k+1)} + \frac{x^{k+2}}{1 \,.\, 2 \ldots (k+2)} + \cdots$$
$$< \frac{1}{e}\left\{\left(\frac{ex}{k}\right)^k + \left(\frac{ex}{k+1}\right)^{k+1} + \left(\frac{ex}{k+2}\right)^{k+2} + \cdots\right\}$$

und hier convergirt die eingeklammerte Reihe stärker als eine geometrische Progression, die nach Potenzen des echten Bruches $\frac{ex}{k}$ fortschreitet.

4. Die Reihe

$$1 + \frac{1}{2}x + \frac{1 \,.\, 3}{2 \,.\, 4}x^2 + \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5}{2 \,.\, 4 \,.\, 6}x^3 + \cdots$$

convergirt für $x^2 < 1$ und divergirt für $x^2 > 1$. Im Falle $x = +1$ divergirt sie (nach c), im Falle $x = -1$ convergirt sie, wie man mittelst des Satzes

$$Lim \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\dots(\beta+n-1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n-1)} = 0, \quad \alpha > \beta$$

leicht finden wird.

5. Die Reihe

$$1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{1} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{x^3}{3} + \cdots$$

convergirt für $x^2 \leqq 1$ und divergirt für $x^2 > 1$.

6. Die Reihe

$$\frac{x}{1^2} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \cdots$$

convergirt für $x^2 \leqq 1$ und divergirt für $x^2 > 1$.

7. Die allgemeinere Reihe

$$\frac{x}{1^\mu} + \frac{x^2}{2^\mu} + \frac{x^3}{3^\mu} + \cdots$$

convergirt (bei jedem μ) für $x^2 < 1$ und divergirt für $x^2 > 1$. Im Falle $x = -1$ convergirt sie, sobald μ eine positive Grösse ist. Im Falle $x = +1$ erhält man (nach c) für $\frac{1}{n} = \delta$

$$Lim \left\{ n \left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n} \right) \right\} = Lim \left\{ \frac{1}{(1+\delta)^\mu} \cdot \frac{(1+\delta)^\mu - 1}{\delta} \right\} = \mu;$$

die Reihe

$$\frac{1}{1^\mu} + \frac{1}{2^\mu} + \frac{1}{3^\mu} + \cdots$$

convergirt also für $\mu > 1$ und divergirt für $\mu < 1$. Ist $\mu = 1$, so kommt man auf das zweite Beispiel zurück.

Zu den letzteren, für $x = +1$ geltenden Resultaten gelangt man auch mittelst des unter d) erwähnten Satzes.

8. Die Reihe

$$\frac{x^2}{2^\mu l2} + \frac{x^3}{3^\mu l3} + \frac{x^4}{4^\mu l4} + \cdots$$

convergirt für $x^2 < 1$ und divergirt für $x^2 > 1$. Im Falle $x = -1$ convergirt sie bei allen positiven μ; ist $x = +1$, so zeigt der Satz d) (für $u_1 = 0$), dass die Reihe nur unter der Bedingung $\mu > 1$ convergirt.

9. Um die Convergenz oder Divergenz der Reihe

$$l(1+\tfrac{1}{1})\frac{x}{1} + l(1+\tfrac{1}{2})\frac{x^2}{2} + l(1+\tfrac{1}{3})\frac{x^3}{3} + \cdots$$

zu entscheiden, benutze man die Ungleichung

$$\frac{h}{a+h} < l(a+h) - la < \frac{h}{a}$$

für $a = 1$, $h = \frac{1}{n}$; man findet dann, dass die Reihe für $x^2 \leqq 1$ convergirt und im Gegenfalle divergirt.

Geht man (für $x = 1$) von den Logarithmen zu den Zahlen zurück, so ergiebt sich der bemerkenswerthe Satz, dass das unendliche Product

$$(1+\tfrac{1}{1})^{\frac{1}{1}}(1+\tfrac{1}{2})^{\frac{1}{2}}(1+\tfrac{1}{3})^{\frac{1}{3}}\ldots$$

gegen einen endlichen Grenzwerth convergirt.

10. Zur Abkürzung sei

$$s_n = \tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

und gegeben die Reihe

$$\frac{x}{1s_1} + \frac{x^2}{2s_2} + \frac{x^3}{3s_3} + \cdots$$

Für $x^2 < 1$ convergirt dieselbe, für $x^2 > 1$ divergirt sie. Im Falle $x = -1$ ist gleichfalls Convergenz vorhanden; im Falle $x = +1$ wende man den Satz d) an und beachte die Ungleichungen

$$\begin{aligned}
&s_2 = 1 + \tfrac{1}{2} < 2,\\
&s_4 = s_2 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} < s_2 + \tfrac{2}{2} < 3,\\
&s_8 = s_4 + \tfrac{1}{5} + \cdots + \tfrac{1}{8} < s_4 + \tfrac{4}{4} < 4,\\
&\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot
\end{aligned}$$

es ergiebt sich dann, dass die Reihe

$$\frac{1}{1s_1} + \frac{1}{2s_2} + \frac{1}{3s_3} + \cdots$$

divergent ist.

11. Die Reihe

$$e^{-s_1}x + e^{-s_2}x^2 + e^{-s_3}x^3 + \cdots,$$

worin s_n dieselbe Bedeutung hat wie in Nr. 10, convergirt für $x^2 < 1$ und divergirt für $x^2 > 1$. Wegen $Lim\, s_n = \infty$ ist auch im Falle $x = -1$ Convergenz vorhanden. Für $x = +1$ zeigt die Anwendung der in Nr. 2 bewiesenen Relation

$$1 - l2 + l(n+1) < s_n < 1 + ln,$$

dass die Reihe divergirt.

12. Um die Reihe

$$l\left\{\frac{(1+\frac{1}{1})^\mu}{1+\frac{1}{1}\mu}\right\}x + l\left\{\frac{(1+\frac{1}{2})^\mu}{1+\frac{1}{2}\mu}\right\}x^2 + l\left\{\frac{(1+\frac{1}{3})^\mu}{1+\frac{1}{3}\mu}\right\}x^3 + \cdots$$

zu untersuchen, bemerke man zunächst, dass μ keine ganze negative Zahl sein darf, weil sonst ein Term unendlich werden würde. Schliesst man im Folgenden die Fälle $\mu = -1, -2, -3$ etc. aus, so ist ferner

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\mu l(n+2) - l(n+1+\mu) - (\mu-1)l(n+1)}{\mu l(n+1) - l(n+\mu) - (\mu-1)ln}x,$$

wobei sich der Grenzwerth des Bruches mittelst des Satzes

$$l(n+h) = ln + \frac{h}{n+\vartheta h}, \quad 0 < \vartheta < 1,$$

finden lässt; man erhält

$$Lim\frac{u_{n+1}}{u_n} = x,$$

mithin convergirt oder divergirt die Reihe, je nachdem $x^2 < 1$ oder $x^2 > 1$ ist. Für $x = -1$ convergirt die Reihe. Der Fall $x = +1$ erledigt sich, wenn man die Gleichung

$$f(h) = f(0) + hf'(\vartheta h), \quad 0 < \vartheta < 1,$$

auf die Function

$$l\left\{\frac{(1+h)^\mu}{1+h\mu}\right\} = \mu l(1+h) - l(1+\mu h)$$

anwendet und nachher $h = \frac{1}{n}$ setzt; die Reihe

$$l\left\{\frac{(1+\frac{1}{1})^\mu}{1+\frac{1}{1}\mu}\right\} + l\left\{\frac{(1+\frac{1}{2})^\mu}{1+\frac{1}{2}\mu}\right\} + l\left\{\frac{(1+\frac{1}{3})^\mu}{1+\frac{1}{3}\mu}\right\} + \cdot$$

erhält dann die Form

$$\mu(\mu-1)\left\{\frac{\vartheta_1}{(1+\vartheta_1)(1+\mu\vartheta_1)} + \frac{\vartheta_2}{(2+\vartheta_2)(2+\mu\vartheta_3)} + \frac{\vartheta_3}{(3+\vartheta_3)(3+\mu\vartheta_3)} + \cdots\right\},$$

aus welcher ihre Convergenz leicht zu ersehen ist.

Hieran knüpft sich die bemerkenswerthe Folgerung, dass das unendliche Product

$$\frac{(1+\frac{1}{1})^\mu}{1+\frac{1}{1}\mu}\cdot\frac{(1+\frac{1}{2})^\mu}{1+\frac{1}{2}\mu}\cdot\frac{(1+\frac{1}{3})^\mu}{1+\frac{1}{3}\mu}\cdots$$

gegen einen bestimmten endlichen Grenzwerth convergirt, welcher selbstverständlich eine gewisse Function von μ sein muss; dieselbe wird nicht selten mit $\Pi(\mu)$ bezeichnet. Hiernach ist für unendlich wachsende n

$$Lim\left\{\frac{(1+\frac{1}{1})^\mu}{1+\frac{1}{1}\mu}\cdot\frac{(1+\frac{1}{2})^\mu}{1+\frac{1}{2}\mu}\cdots\frac{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^\mu}{1+\frac{1}{n-1}\mu}\right\}=\Pi(\mu),$$

oder nach gehöriger Hebung

$$Lim\left\{\frac{1}{\mu+1}\cdot\frac{2}{\mu+2}\cdots\frac{n-1}{\mu+n-1}n^\mu\right\}=\Pi(\mu),$$

mithin auch

$$Lim\left\{\frac{1}{\mu}\cdot\frac{2}{\mu+1}\cdot\frac{3}{\mu+2}\cdots\frac{n}{\mu+n-1}n^{\mu-1}\right\}=\frac{\Pi(\mu)}{\mu}.$$

Die rechts stehende Function pflegt man $\Gamma(\mu)$ zu nennen. Bei ganzen positiven μ sind ihre Werthe leicht zu finden, nämlich $\Gamma(1)=1$, $\Gamma(2)=1$, $\Gamma(3)=1\cdot 2$ und überhaupt

$$\Gamma(p)=1\,.\,2\,.\,3\,\ldots(p-1).$$

Zufolge der Definition von $\Gamma(\mu)$ kann man setzen

$$\frac{1}{\mu}\cdot\frac{2}{\mu+1}\cdots\frac{n}{\mu+n-1}n^{\mu-1}=\frac{\Gamma(\mu)}{1+\varrho},$$

wo ϱ zwar nicht genauer bekannt ist, jedenfalls aber bei unendlich wachsenden n gegen die Null convergiren muss. Hiernach ergiebt sich die oft brauchbare Gleichung

$$\frac{\mu(\mu+1)(\mu+2)\ldots(\mu+n-1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots n}=(1+\varrho)\frac{n^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}.$$

Um eine Anwendung derselben zu zeigen, leiten wir aus der vorstehenden Gleichung die folgende ab

$$\frac{b(b+1)(b+2)\ldots(b+n-1)}{c(c+1)(c+2)\ldots(c+n-1)}=\frac{1+\varrho_1}{1+\varrho}\cdot\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)}\cdot\frac{1}{n^{c-b}},$$

welche sofort erkennen lässt, dass

$$Lim \frac{b(b+1)(b+2)\ldots(b+n-1)}{c(c+1)(c+2)\ldots(c+n-1)}$$

$=\infty$, $=1$ oder $=0$ ist, je nachdem b mehr, eben so viel oder weniger als c beträgt.

13. Die Reihe

$$1+\frac{\beta}{1}\cdot\frac{x}{1^\alpha}+\frac{\beta(\beta+1)}{1\,.\,2}\cdot\frac{x^2}{2^\alpha}+\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1\,.\,2\,.\,3}\cdot\frac{x^3}{3^\alpha}+\cdots$$

convergirt für $x^2<1$ und divergirt für $x^2>1$. Die Fälle $x=-1$ und $x=+1$ erledigen sich durch Anwendung des vorigen Satzes, zufolge dessen die Reihe folgendermassen geschrieben werden kann

$$1+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\left\{\frac{1+\varrho_1}{1^{\alpha-\beta+1}}x+\frac{1+\varrho_2}{2^{\alpha-\beta+1}}x^2+\frac{1+\varrho_3}{3^{\alpha-\beta+1}}x^3+\cdots\right\};$$

man ersieht hieraus, dass im Falle $x=-1$ nur für $\alpha-\beta>-1$ und im Falle $x=+1$ nur für $\alpha-\beta>0$ Convergenz vorhanden ist.

14. Die Reihe

$$1+\frac{a\,.\,b}{1\,.\,c}x+\frac{a(a+1)\,.\,b(b+1)}{1\,.\,2\,.\,c(c+1)}x^2$$
$$+\frac{a(a+1)(a+2)\,.\,b(b+1)(b+2)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,c(c+1)(c+2)}x^3+\cdots$$

convergirt für $x^2<1$ und divergirt für $x^2>1$. Giebt man der Reihe die Form

$$1+\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\left\{\frac{(1+\delta_1)x}{1^{c-a-b+1}}+\frac{(1+\delta_2)x^2}{2^{c-a-b+1}}+\frac{(1+\delta_3)x^3}{3^{c-a-b+1}}+\cdots\right\},$$

wo δ_1, δ_2, δ_3 etc. echte Brüche sind und $Lim\,\delta_n=0$ ist, so folgt, dass die Reihe für $x=-1$ nur unter der Bedingung $c-a-b>-1$, und für $x=+1$ nur unter der Bedingung $c-a-b>0$ convergirt.

§ 37.

Summirung einiger Potenzreihen.

Für das Folgende sind einige Sätze nöthig, welche wir zunächst vorausschicken.

a) Die unendliche Potenzreihe

$$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots$$

convergirt unbedingt, wenn der absolute Werth von

$$Lim\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}x\right)$$

weniger als die Einheit beträgt; setzt man zur Abkürzung

$$Lim\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda,$$

so lässt sich die vorige Bedingung kürzer ausdrücken durch die Ungleichung

$$-\lambda < x < +\lambda \text{ oder } x^2 < \lambda^2.$$

Unter derselben Bedingung convergirt auch die Reihe

$$1a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \cdots,$$

wie man durch Untersuchung von $Lim\frac{u_{n+1}}{u_n}$ findet.

b) Die Summen der vorigen Reihen mögen $f(x)$ und $\varphi(x)$ heissen, nämlich

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots,$$
$$\varphi(x) = 1a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots;$$

man kennt diese Summen zwar nicht, weiss aber wenigstens, dass beide so lange endliche Werthe haben, als $x^2 < \lambda^2$ bleibt. Vermehrt man x um eine kleine positive Grösse δ von der Beschaffenheit, dass auch $(x+\delta)^2 < \lambda^2$ ist, und vermindert man andererseits x um ε unter Festhaltung der Bedingung $(x-\varepsilon)^2 < \lambda^2$, so hat man durch Subtraction der entsprechenden Gleichungen

$$f(x+\delta) - f(x-\varepsilon)$$
$$= (\delta+\varepsilon)\left\{a_1\frac{x+\delta-(x-\varepsilon)}{\delta+\varepsilon} + a_2\frac{(x+\delta)^2-(x-\varepsilon)^2}{\delta+\varepsilon}\right.$$
$$\left. + a_3\frac{(x+\delta)^3-(x-\varepsilon)^3}{\delta+\varepsilon} + \cdots\right\}.$$

Hier lässt sich auf alle rechts stehenden Quotienten der Satz

$$m\alpha^{m-1} < \frac{\beta^m - \alpha^m}{\beta - \alpha} < m\beta^{m-1}, \quad \alpha < \beta$$

für $\alpha = x - \varepsilon$, $\beta = x + \delta$ anwenden; dies giebt unter der Voraussetzung, dass $a_1, a_2, a_3 \ldots$ und x positiv sind,

$$(\delta+\varepsilon)\{1a_1 + 2a_2(x-\varepsilon) + 3a_3(x-\varepsilon)^2 + \cdots\}$$
$$< f(x+\delta) - f(x-\varepsilon) <$$
$$(\delta+\varepsilon)\{1a_1 + 2a_2(x+\delta) + 3a_3(x+\delta)^2 + \cdots\}$$

d. i.

$$(\delta+\varepsilon)\varphi(x-\varepsilon) < f(x+\delta) - f(x-\varepsilon) < (\delta+\varepsilon)\varphi(x+\delta).$$

Bei verschwindenden δ und ε folgt hieraus, weil $\varphi(x)$ einen endlichen Werth hat,

$$Lim\,[f(x+\delta) - f(x-\varepsilon)] = 0;$$

die Summe einer nur positive Terme enthaltenden Potenzreihe ist hiernach eine stetige Function der Variabelen x.

Kommen positive und negative Terme vor, so lassen sich alle positiven Terme für sich, und ebenso alle negativen Terme für sich zusammenziehen und die Summe $f(x)$ erhält dann die Form $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$. Hier sind $f_1(x)$ und $f_2(x)$ einzeln genommen stetige Functionen von x, ihre Differenz $f(x)$ ändert sich daher gleichfalls continuirlich. Es gilt also der Satz, dass die Summe jeder Potenzreihe innerhalb des Convergenzintervalles eine stetige Function der betreffenden Variabelen ist.

c) Aus der letzten Ungleichung folgt für $\varepsilon = 0$

$$\varphi(x) < \frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta} < \varphi(x+\delta)$$

und durch den Uebergang zur Grenze für verschwindende δ

$$f'(x) = \varphi(x).$$

Besteht demnach eine Potenzreihe aus positiven Termen, so ist der Differentialquotient ihrer Summe gleich der Summe von den Differentialquotienten ihrer einzelnen Summanden. Mittelst der vorhin benutzten Zerlegung von $f(x)$ in $f_1(x) - f_2(x)$ lässt sich dieser Satz auf beliebige Potenzreihen ausdehnen.

d) Wenn zwei Functionen $F(x)$ und $f(x)$ gleiche Differentialquotienten haben $[F'(x) = f'(x)]$, so lässt sich auf folgende Weise eine Eigenschaft dieser Functionen entdecken. Es sei $\psi(x)$ die Differenz beider Functionen, d. h.

$$\psi(x) = F(x) - f(x);$$

man hat dann

$$\psi'(x) = F'(x) - f'(x) = 0.$$

Unter der Voraussetzung, dass $F(x)$ und $f(x)$ innerhalb irgend eines Intervalles stetig bleiben, ist auch $\psi(x)$ eine continuirliche Function von x, dasselbe gilt von $\psi'(x) = 0$. Mittelst des Satzes

$$\psi(a+h) - \psi(a) = h\psi'(a+\vartheta h), \quad 0 < \vartheta < 1$$

ergiebt sich nun, wenn a und $a+h$ innerhalb des Continuitätsintervalles liegen,

$$\psi(a+h) - \psi(a) = 0,$$

woraus hervorgeht, dass $\psi(x)$ einen constanten Werth hat. Zwei stetige Functionen, welche gleiche Differentialquotienten besitzen, können daher nur um eine Constante differiren.

Aufgabe 1. Man sucht die Summe der Reihe

$$\frac{1}{1}x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \cdots,$$

welche für $x^2 < 1$ convergirt.

Bezeichnet man die Summe der Reihe mit $F(x)$, so hat man

$$F'(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots,$$

d. i.

$$F'(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Schreibt man statt dieser Gleichung die folgende

$$F'(x) = \frac{dl\left(\frac{1}{1-x}\right)}{dx},$$

so ergiebt sich nach dem Satze d)

$$F(x) - l\left(\frac{1}{1-x}\right) = Const,$$

oder vermöge der Bedeutung von $F(x)$

$$\frac{1}{1}x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots = l\left(\frac{1}{1-x}\right) + Const.$$

Die Constante bestimmt sich dadurch, dass man dem x irgend einen speciellen zwischen -1 und $+1$ liegenden Werth ertheilt; am besten eignet sich hierzu der Werth $x = 0$, mittelst dessen man findet $Const = 0$, also

$$l\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{1}x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots,$$
$$x^2 < 1.$$

Setzt man einmal $x = +y$, das andere Mal $x = -y$, so giebt die Differenz beider Gleichungen

$$l\left(\frac{1+y}{1-y}\right) = 2\left(\frac{1}{1}y + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{5}y^5 + \cdots\right),$$
$$y^2 < 1.$$

Hieraus lassen sich noch folgende Formeln herleiten

$$lz = \tfrac{1}{2}[l(z+1) + l(z-1)]$$

$$+ \frac{1}{2z^2-1} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{1}{2z^2-1}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\frac{1}{2z^2-1}\right)^5 + \cdots,$$

$$z > 1,$$

$$l(z+2) = 2[l(z+1) - l(z-1)] + l(z-2)$$

$$+ 2\left\{\frac{2}{z^3-3z} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{2}{z^3-3z}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\frac{2}{z^3-3z}\right)^5 + \cdots\right\},$$

$$z > 2.$$

Aufgabe 2. Man sucht die Summe der immer convergirenden Reihe

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\,.\,2} + \frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \cdots$$

Bezeichnet man die gesuchte Summe durch $\Phi(x)$, so erhält man

$$\Phi'(x) = \Phi(x),$$

wofür geschrieben werden kann

$$\frac{dl\Phi(x)}{dx} = \frac{d(x)}{dx}.$$

Daraus folgt

$$l\Phi(x) - x = c \text{ oder } \Phi(x) = e^{c+x}$$

d. i.

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\,.\,2} + \frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \cdots = e^{c+x}.$$

Für $x = 0$ ergiebt sich $e^c = 1$, mithin

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\,.\,2} + \frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \cdots$$

Aufgabe 3. Man sucht die Summe der Reihe

$$1 + \frac{\mu}{1}x + \frac{\mu(\mu-1)}{1\,.\,2}x^2 + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1\,.\,2\,.\,3}x^3 + \cdots,$$

welche für $x^2 < 1$ convergirt.

Bezeichnet man mit $\Phi(x)$ die gesuchte Summe, so findet man

$$(1+x)\Phi'(x) = \mu\Phi(x),$$

wofür geschrieben werden kann

$$\frac{dl\Phi(x)}{dx} = \frac{d[\mu l(1+x)]}{dx}.$$

Hieraus folgt

$$l\,\Phi(x) - \mu l(1+x) = c \quad \text{oder} \quad \Phi(x) = e^c(1+x)^\mu,$$

mithin

$$1 + \frac{\mu}{1}x + \frac{\mu(\mu-1)}{1\,.\,2}x^2 + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1\,.\,2\,.\,3}x^3 + \cdots = e^c(1+x)^\mu.$$

Für $x = 0$ ergiebt sich $e^c 1^\mu = 1$, also wenn $(1+x)^\mu$ im absoluten Sinne genommen und demgemäss $1^\mu = 1$ gesetzt wird, $e^c = 1$ und

$$(1+x)^\mu = 1 + \frac{\mu}{1}x + \frac{\mu(\mu-1)}{1\,.\,2}x^2 + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1\,.\,2\,.\,3}x^3 + \cdots,$$
$$x^2 < 1.$$

Aufgabe 4. Man sucht die Summen u und v der folgenden, immer convergirenden Reihen

$$u = 1 - \frac{x^2}{1\,.\,2} + \frac{x^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} - \frac{x^6}{1\,.\,2\ldots 6} + \cdots,$$

$$v = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{x^5}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5} - \cdots$$

Quadrirt man die erste Gleichung, so entsteht ein Resultat von folgender Form

$$u^2 = 1 - \frac{a_2}{1\,.\,2}x^2 + \frac{a_4}{1\ldots 4}x^4 - \frac{a_6}{1\ldots 6}x^6 + \cdots,$$

und darin ist

$$a_n = 1 + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} + \cdots,$$

oder nach der kurzen Bezeichnung der Binomialcoefficienten

$$a_n = (n)_0 + (n)_2 + (n)_4 + (n)_6 + \cdots$$

Auf gleiche Weise erhält man

$$v^2 = \frac{b_2}{1\,.\,2}x^2 - \frac{b_4}{1\ldots 4}x^4 + \frac{b_6}{1\ldots 6}x^6 - \cdots$$

und darin ist

$$b_n = (n)_1 + (n)_3 + (n)_5 + \cdots$$

Aus den Formeln für u^2 und v^2 folgt

$$u^2 + v^2 = 1 - \frac{a_2 - b_2}{1\,.\,2}x^2 + \frac{a_4 - b_4}{1\ldots 4}x^4 - \frac{a_6 - b_6}{1\ldots 6}x^6 + \cdots,$$

darin ist aber

$$a_n - b_n = (n)_0 - (n)_1 + (n)_2 - (n)_3 + \cdots = 0,$$

mithin bleibt

$$u^2 + v^2 = 1,$$

wofür man auch schreiben kann

$$v = \sqrt{1-u^2}, \quad u = \sqrt{1-v^2}.$$

Differenzirt man ferner die ursprünglichen Gleichungen für u und v, so hat man

$$\frac{du}{dx} = -v = -\sqrt{1-u^2},$$

$$\frac{dv}{dx} = +u = +\sqrt{1-v^2}$$

oder in anderer Form

$$\frac{d\,arc\cos u}{dx} = -\frac{d(x)}{dx},$$

$$\frac{d\,arc\sin v}{dx} = \frac{d(x)}{dx}.$$

Die erste Gleichung liefert $arc\cos u - x = \alpha$ oder $u = \cos(x+\alpha)$, mithin

$$1 - \frac{x^2}{1\,.\,2} + \frac{x^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} - \cdots = \cos(x+\alpha);$$

für $x = 0$ wird hieraus $\cos\alpha = 1$, mithin $\alpha = 2k\pi$, wo k eine positive oder negative ganze Zahl bedeutet, also durch Substitution dieses Werthes

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1\,.\,2} + \frac{x^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} - \frac{x^6}{1 \ldots 6} + \cdots$$

Auf analoge Weise erhält man $v = \sin(x+\beta)$ und schliesslich

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{x^5}{1\,.\,2\,.\,5} + \cdots$$

Aufgabe 5. Man sucht die Summe der folgenden, für $x^2 < 1$ convergirenden Reihe

$$\tfrac{1}{1}x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{7}x^7 + \cdots$$

Wird die Summe der Reihe mit $F(x)$ bezeichnet, so ergiebt sich

$$F'(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots = \frac{1}{1+x^2},$$

oder

$$\frac{dF(x)}{dx} = \frac{d\,arc\tan x}{dx}$$

und hieraus folgt

$$F(x) = arc\tan x + c.$$

Nach Substitution dieses Werthes kann die Constante mittelst der Specialisirung $x = 0$ bestimmt werden und es ist dann

$$arc\,tan\,x = \tfrac{1}{1}x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{7}x^7 + \cdots,$$
$$x^2 < 1.$$

Aufgabe 6. Man sucht die Summe der folgenden, für $x^2 \leq 1$ convergirenden Reihe

$$\frac{x}{1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6} \cdot \frac{x^7}{7} + \cdots$$

Bezeichnet $F(x)$ die Summe, so ist

$$F'(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}x^4 + \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}x^6 + \cdots$$

d. i.

$$F'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

oder

$$\frac{d\,F(x)}{dx} = \frac{d\,arc\,sin\,x}{dx}.$$

Hieraus folgt

$$F(x) = arc\,sin\,x + Const,$$

und nach Bestimmung der Constanten ergiebt sich

$$arc\,sin\,x = \frac{x}{1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4} \cdot \frac{x^5}{5} + \cdots,$$
$$x^2 \leq 1.$$

§ 38.

Reihenentwickelungen mit Beachtung des Restes.

Wenn man nicht im Voraus weiss, ob und unter welchen Bedingungen eine Function $f(x)$ in eine Potenzreihe verwandelbar ist, so wäre es eine völlig ungerechtfertigte Hypothese,

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

setzen zu wollen; jedenfalls aber darf man eine Gleichung von folgender Form aufstellen

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + R,$$

wo R eine unbekannte Function von x ist, denn es sagt diese Gleichung nichts weiter, als dass der Unterschied zwischen $f(x)$ und der Reihe eine gewisse Function von x sein wird. Wie man durch passende Rechnungsoperationen $a_0, a_1, \ldots a_n$ und R, den sogenannten Rest der Reihe, bestimmen kann, mögen die folgenden Aufgaben zeigen.

Aufgabe 1. Es sei

$$l\left(\frac{1}{1-x}\right) = a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + R,$$

so ergiebt sich durch Differentiation

$$\frac{1}{1-x} = 1 a_1 + 2 a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1} + \frac{dR}{dx}.$$

Diese Gleichung wird identisch mit der bekannten Gleichung

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + \frac{x^n}{1-x},$$

wenn die Coefficienten $a_1, \ldots a_n$ folgende Werthe erhalten

$$a_2 = \tfrac{1}{1}, \quad a_2 = \tfrac{1}{2}, \ldots a_n = \frac{1}{n},$$

und wenn überdies

$$\frac{dR}{dx} = \frac{x^n}{1-x}$$

ist. Um hervorzuheben, dass R von x abhängt, setze man $R = \varphi(x)$ also

$$\varphi'(x) = \frac{x^n}{1-x};$$

weil ferner $\varphi(x)$ und $\varphi'(x)$ stetige Functionen von x sind, wenn $x < 1$ bleibt, so lässt sich der Satz

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x\varphi'(\vartheta x), \quad 0 < \vartheta < 1$$

anwenden, wodurch man erhält

$$\varphi(x) = x\frac{(\vartheta x)^n}{1-\vartheta x}.$$

Nach diesen Bemerkungen hat man

$$l\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n} + \frac{\vartheta^n x^{n+1}}{1-\vartheta x},$$

$$x < 1.$$

Bei unendlich wachsenden n hat x^n nur dann die Null zur Grenze, wenn x zwischen -1 und $+1$ liegt; es ist daher

$$l\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots,$$

$$-1 < x < +1.$$

Aufgabe 2. Von der Gleichung

$$e^x = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + R,$$

ausgehend, erhält man durch Differentiation

$$e^x = 1 a_1 + 2 a_2 x + 3 a_3 x^2 + \cdots + n a_n x^{n-1} + \frac{dR}{dx};$$

diese Gleichung wird mit der vorigen identisch, wenn erstens

$$1 a_1 = 1, \quad 2 a_2 = a_1, \quad 3 a_3 = a_2, \ldots n a_n = a_{n-1},$$

d. h.

$$a_1 = \tfrac{1}{1}, \quad a_2 = \frac{1}{1 \cdot 2}, \quad a_3 = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \cdots a_n = \frac{1}{1 \cdot 2 \ldots n},$$

und wenn ausserdem

$$\frac{dR}{dx} = a_n x^n + R$$

ist. Um die letztere Bedingung zu vereinfachen, setzen wir

$$R = e^x \psi(x);$$

es wird dann

$$\psi'(x) = a_n x^n e^{-x} = \frac{x^n}{1 \cdot 2 \ldots n} e^{-x},$$

mithin wegen $\psi(x) = \psi(0) + x\psi'(\vartheta x)$

$$\psi(x) = \frac{\vartheta^n x^{n+1}}{1 \cdot 2 \ldots n} e^{-\vartheta x};$$

hieraus ergiebt sich R und nachher

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \cdots + \frac{x^n}{1 \cdot 2 \ldots n} + \frac{\vartheta^n x^{n+1}}{1 \cdot 2 \ldots n} e^{(1-\vartheta)x}.$$

Bei unendlich wachsenden n wird für jedes endliche x

$$Lim \frac{x^n}{1 \cdot 2 \ldots n} = 0,$$

der Rest convergirt dann gegen die Null, und damit kommt man auf die bekannte Exponentialreihe zurück

Aufgabe 3. Es sei

$$(1 + x)^\mu = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + R;$$

differenzirt man diese Gleichung und multiplicirt nachher mit $1 + x$, so erhält man

$$\mu(1+x)^\mu = 1 a_1 + (1 a_1 + 2 a_2) x + (2 a_2 + 3 a_3) x^2 + \cdots$$
$$\cdots + [(n-1) a_{n-1} + n a_n] x^{n-1} + n a_n x^n + (1+x)\frac{dR}{dx},$$

und andererseits ist direct

$$\mu(1+x)^\mu = \mu + \mu a_1 x + \mu a_2 x^2 + \cdots + \mu a_{n-1} x^{n-1} + \mu a_n x^n + \mu R.$$

Die beiden letzten Gleichungen werden identisch, wenn erstens

$$1a_1 = \mu, \quad 1a_1 + 2a_2 = \mu a_1, \quad 2a_2 + 3a_3 = \mu a_2, \ldots$$
$$\ldots (n-1)\, a_{n-1} + n a_n = \mu a_{n-1}$$

ist, woraus folgt

$$a_1 = \frac{\mu}{1}, \quad a_2 = \frac{\mu(\mu-1)}{1\,.\,2}, \quad a_3 = \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1\,.\,2\,.\,3}, \ldots$$
$$\ldots a_n = \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-[n-1])}{1\,.\,2\,.\,3\ldots n},$$

und wenn zweitens die Gleichung

$$n a_n x^n + (1+x)\frac{dR}{dx} = \mu a_n x^n + \mu R,$$

oder

$$(1+x)\frac{dR}{dx} - \mu R = (\mu - n)\, a_n x^n$$

stattfindet. Dieselbe vereinfacht sich mittelst der Substitution

$$R = (\mu - n)\, a_n (1+x)^\mu \varphi(x);$$

sie wird nämlich

$$\varphi'(x) = \frac{x^n}{(1+x)^{\mu+1}}$$

und hieraus folgt, wofern $(1+x)^\mu$ keine Unterbrechung der Continuität erleidet,

$$\varphi(x) = \frac{\vartheta^n x^{n+1}}{(1+\vartheta x)^{\mu+1}}.$$

Diese Formel bestimmt nachher R, und wenn man a_n kurz mit $(\mu)_n$ bezeichnet, so folgt

$$(1+x)^\mu = 1 + (\mu)_1 x + (\mu)_2 x^2 + \cdots$$
$$\cdots + (\mu)_n x^n + (\mu - n)(\mu)_n \frac{\vartheta^n (1+x)^\mu x^{n+1}}{(1+\vartheta x)^{\mu+1}}.$$

Im Fall x zwischen -1 und $+1$ liegt, ist bei unendlich wachsenden n

$$Lim\,[(\mu - n)(\mu)_n x^n] = 0;$$

der Rest convergirt dann gegen die Null, und damit kommt man auf den allgemeinen binomischen Satz zurück.

Aufgabe 4. Es sei zu entwickeln

$$arc\tan x = a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + \cdots + a_{2n-1} x^{2n-1} + R.$$

Durch Differentiation ergiebt sich

$$\frac{1}{1+x^2} = 1a_1 + 3a_3 x^2 + 5a_5 x^4 + \cdots + (2n-1)\, a_{2n-1} x^{2n-2} + \frac{dR}{dx},$$

andererseits ist identisch

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^{n-1}x^{2n-2} + \frac{(-1)^n x^{2n}}{1+x^2},$$

mithin durch Vergleichung

$$a_1 = \tfrac{1}{1}, \quad a_3 = -\tfrac{1}{3}, \quad a_5 = +\tfrac{1}{5}, \ldots a_{2n-1} = \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1},$$

$$\frac{dR}{dx} = \frac{(-1)^n x^{2n}}{1+x^2}.$$

Schreibt man für den Augenblick $\varphi(x)$ statt R, so erhält man

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x\varphi'(\vartheta x) = x\frac{(-1)^n(\vartheta x)^{2n}}{1+(\vartheta x)^2}$$

und zusammen

$$\mathit{arc\,tan}\, x = \tfrac{1}{1}x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1} + \frac{(-1)^n \vartheta^{2n} x^{2n+1}}{1+\vartheta^2 x^2}.$$

Bei echt gebrochenen x und unendlich wachsenden n convergirt der Rest gegen die Null und es entsteht die bekannte unendliche Reihe für *arc tan x*.

Aufgabe 5. Es sei zu entwickeln

$$\mathit{arc\,sin}\, x = a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + \cdots + a_{2n-1}x^{2n-1} + R.$$

Durch Differentiation erhält man

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1a_1 + 3a_3x^2 + 5a_5x^4 + \cdots + (2n-1)a_{2n-1}x^{2n-2} + \frac{dR}{dx},$$

andererseits ist nach dem binomischen Satze für $x^2 < 1$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}x^4 + \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}x^6 + \cdots$$

Beide Gleichungen werden identisch, wenn erstens

$$a_1 = \tfrac{1}{1}, \quad a_3 = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{3}, \quad a_5 = \frac{1.3}{2.4}\cdot\tfrac{1}{5}, \ldots a_{2n-1} = \frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots(2n-2)}\cdot\frac{1}{2n-1}$$

und wenn zweitens ist

$$\frac{dR}{dx} = \frac{1\,.\,3\,.\,5\ldots(2n-1)}{2\,.\,4\,.\,6\ldots(2n)}x^{2n}\left\{1 + \frac{2n+1}{2n+2}x^2 + \cdots\right\}.$$

Für $R = \varphi(x)$ folgt hieraus

$$\varphi(x) = \frac{1\,.\,3\,.\,5\ldots(2n-1}{2\,.\,4\,.\,6\ldots(2n)}\vartheta^{2n}x^{2n+1}\left\{1 + \frac{2n+1}{2n+2}\vartheta^2x^2 + \cdots\right\};$$

die Summe der eingeklammerten Reihe beträgt weniger als

$$1 + \vartheta^2x^2 + \vartheta^4x^4 + \cdots = \frac{1}{1-\vartheta^2x^2}$$

und kann daher

$$= \frac{\varepsilon}{1 - \vartheta^2 x^2}$$

gesetzt werden, wo ε einen nicht näher bekannten positiven echten Bruch bezeichnet. Nach diesen Erörterungen ist für $x^2 < 1$

$$arc\,sin\,x = \frac{x}{1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4} \cdot \frac{x^5}{5} + \cdots$$

$$\cdots + \frac{1\,.\,3 \ldots (2n-3)}{2\,.\,4 \ldots (2n-2)} \cdot \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \frac{1\,.\,3 \ldots (2n-1)}{2\,.\,4 \ldots (2n)} \cdot \frac{\varepsilon \vartheta^{2n} x^{2n+1}}{1 - \vartheta^2 x^2}.$$

Bei unendlich wachsenden n convergirt der Rest gegen die Null, und es entsteht die unendliche Reihe für $arc\,sin\,x$.

Aufgabe 6. Es sei zu entwickeln

$$l(x + \sqrt{1 + x^2}) = a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + \cdots + a_{2n-1} x^{2n-1} + R.$$

Durch ein ganz ähnliches Verfahren wie in Nr. 5 findet man

$$l(x + \sqrt{1 + x^2}) = \frac{x}{1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4} \cdot \frac{x^5}{5} - \cdots$$

$$\cdots + (-1)^{n-1} \frac{1\,.\,3 \ldots (2n-3)}{2\,.\,4 \ldots (2n-2)} \cdot \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$$

$$+ (-1)^n \frac{1\,.\,3 \ldots (2n-1)}{2\,.\,4 \ldots (2n)} \vartheta^{2n} x^{2n+1} (1 - \varepsilon x^2),$$

wobei $x^2 < 1$ sein muss, ϑ und ε positive echte Brüche bedeuten. Bei unendlich wachsenden n wird

$$l(x + \sqrt{1 + x^2}) = \frac{x}{1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4} \cdot \frac{x^5}{5} - \cdots,$$
$$x^2 < 1;$$

diese Gleichung gilt auch noch im Falle $x^2 = 1$.

§ 39.

Die Sätze von Taylor und Mac Laurin.

Im vorigen Paragraphen wurden die Reihen für $l(1-x)$, e^x etc. mittelst specieller Eigenschaften dieser Functionen entwickelt, jene Reihen können aber auch aus einer gemeinsamen Quelle abgeleitet werden, nämlich aus den Sätzen von Taylor und Mac Laurin. Hierbei macht sich eine Untersuchung des Restes nöthig, und für diese ist die Bemerkung von Werth, dass der Rest unter unendlich vielen verschiedenen Formen dargestellt werden kann.

Setzt man

$$\varphi(x) = f(x) + \frac{b-x}{1} f'(x) + \frac{(b-x)^2}{1\,.\,2} f''(x) + \cdots$$
$$\cdots + \frac{(b-x)^{n-1}}{1\,.\,2\,.\,3 \ldots (n-1)} f^{(n-1)}(x),$$

worin $f(x)$ eine gegebene Function, $\varphi(x)$ dagegen die unbekannte Summe der rechtsstehenden n-gliedrigen Reihe bezeichnet, so ist

$$\varphi(a) = f(a) + \frac{b-a}{1} f'(a) + \frac{(b-a)^2}{1\,.\,2} f''(a) + \cdots$$
$$\cdots + \frac{(b-a)^{n-1}}{1\,.\,2\,.\,3 \ldots (n-1)} f^{(n-1)}(a);$$

und ferner unter der Voraussetzung, dass $f(b)$, $f'(b)$, $f''(b), \ldots$ $f^{(n-1)}(b)$ endliche Grössen sind

$$\varphi(b) = f(b).$$

Andererseits ergiebt sich durch Differentiation

$$\varphi'(x) = \frac{(b-x)^{n-1}}{1\,.\,2\,.\,3 \ldots (n-1)} f^{(n)}(x).$$

Wir benutzen nun folgenden Satz: wenn $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$, $\psi(x)$, $\psi'(x)$ von $x = a$ bis $x = b$ endlich und stetig bleiben und wenn ferner $\psi'(x)$ innerhalb des genannten Intervalles sein Vorzeichen nicht wechselt, so ist

$$\frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{\psi(b) - \psi(a)} = \frac{\varphi'(a + \vartheta[b-a])}{\psi'(a + \vartheta[b-a])}, \quad 0 < \vartheta < 1,$$

oder

$$\varphi(a) = \varphi(b) - \frac{\psi(b) - \psi(a)}{\psi'(a + \vartheta[b-a])} \varphi'(a + \vartheta[b-a]).$$

Mittelst dieser Formel ergiebt sich unter Benutzung der Werthe von $\varphi(a)$, $\varphi(b)$ und $\varphi'(x)$

$$f(a) + \frac{b-a}{1} f'(a) + \frac{(b-a)^2}{1\,.\,2} f''(a) + \cdots + \frac{(b-a)^{n-1}}{1.2.3 \ldots (n-1)} f^{(n-1)}(a)$$
$$= f(b) - \frac{\psi(b) - \psi(a)}{\psi'(a + \vartheta[b-a])} \cdot \frac{(1-\vartheta)^{n-1}(b-a)^{n-1}}{1\,.\,2\,.\,3 \ldots (n-1)} f^{(n)}(a + \vartheta[b-a]),$$

wobei $f(x)$, $f(x), \ldots f'^{(n)}(x)$, $\psi(x)$ und $\psi'(x)$ von $x = a$ bis $x = b$ endlich und stetig bleiben müssen und $\psi(x)$ eine beliebige nur an die eine Bedingung gebundene Function ist, dass $\psi'(x)$ zwischen a und b keinen Vorzeichenwechsel erleiden darf.

Für $b - a = h$ oder $b = a + h$ ergiebt sich der Taylor'sche Satz

$$f(a+h) - R_n = f(a) + \frac{h}{1} f'(a) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} f''(a) + \cdots$$
$$\cdots + \frac{h^{n-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)} f^{(n-1)}(a),$$

worin der Rest R_n durch die Gleichung

$$R_n = \frac{\psi(a+h) - \psi(a)}{\psi'(a + \vartheta h)} \cdot \frac{(1-\vartheta)^{n-1} h^{n-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)} f^{(n)}(a + \vartheta h)$$

bestimmt ist und zufolge der Willkürlichkeit von $\psi(x)$ unendlich viele verschiedene Formen annehmen kann. Die Wahlen $\psi(x) = x$ und $\psi(x) = (a + h - x)^n$ führen zu den gewöhnlich in den Lehrbüchern angegebenen Restformen.

Setzt man noch $a = 0$, so entsteht der Satz von Mac Laurin

$$f(h) - R_n = f(0) + \frac{f'(0)}{1} h + \frac{f''(0)}{1 \cdot 2} h^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)} h^{n-1},$$

$$R_n = \frac{\psi(h) - \psi(0)}{\psi'(\vartheta h)} \cdot \frac{(1-\vartheta)^{n-1} h^{n-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)} f^{(n)}(\vartheta h),$$

worin $f(x), f'(x), \ldots f^{(n)}(x)$, $\psi(x)$ und $\psi'(x)$ von $x = 0$ bis $x = h$ stetig und endlich bleiben müssen und $\psi'(x)$ zwischen 0 und h keinen Vorzeichenwechsel erleiden darf. Für $\psi(x) = x$ und $\psi(x) = (h - x)^n$ kommen die gewöhnlichen Restformen zum Vorschein.

Die Annahme $\psi(x) = h^p - (h - x)^p$, worin p eine beliebige positive Grösse bedeuten möge, führt zu der Formel

$$R_n = \frac{(1-\vartheta)^{n-p} h^n}{p \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)} f^{(n)}(\vartheta h), \quad p > 0,$$

in welcher man nicht selten p so wählen kann, dass sich R_n vereinfacht wie z. B. in Aufgabe 2.

Für $\psi(x) = (h - x)^n f^{(n)}(x)$ ergiebt sich

$$R_n = \frac{f^{(n)}(0)}{1 \cdot 2 \ldots n} \cdot \frac{h^n}{1 - \varrho_n}, \quad \varrho_n = \frac{(1-\vartheta) h}{n} \cdot \frac{f^{(n+1)}(\vartheta x)}{f^{(n)}(\vartheta x)},$$

wobei der Ausdruck

$$n f^{(n)}(x) - (h - x) f^{(n+1)}(x)$$

zwischen $x = 0$ und $x = h$ keinen Vorzeichenwechsel erleiden darf.

Aufgabe 1. Man soll $(1 + h)^u$ nach dem Satze von Mac Laurin entwickeln.

Es ergiebt sich

$$(1+h)^\mu - R_n = 1 + \frac{\mu}{1} h + \frac{\mu(\mu-1)}{1\,.\,2} h^2 + \cdots$$

$$+ \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-[n-2])}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(n-1)} h^{n-1},$$

und wenn $\psi(x) = (1+x)^\mu$ genommen wird, so ist unter der Voraussetzung von $h < -1$

$$R_n = [(1+h)^\mu - 1] \frac{(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-[n-1])}{1\,.\,2\ldots(n-1)} \left(\frac{h-\vartheta h}{1+\vartheta h}\right)^{n-1}.$$

Nach dem bekannten Satze, dass für $q^2 < 1$

$$Lim \left\{ \frac{(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-[n-1])}{1\,.\,2\ldots(n-1)} q^{n-1} \right\} = 0$$

ist, findet man leicht, dass R_n gegen die Null convergirt, wenn

$$\left(\frac{h-\vartheta h}{1-\vartheta h}\right)^2 < 1$$

bleibt, welche Bedingung für $h^2 < 1$ erfüllt ist. Man erhält so den binomischen Satz.

Auf ähnliche Weise lassen sich die Functionen $l(1+h)$, e^h, $\cos h$, $\sin h$, $\operatorname{arc}\tan h$ in endliche Reihen verwandeln; bei unendlich wachsenden n ist dann zu untersuchen, unter welchen Umständen $Lim\, R_n = 0$ wird.

Aufgabe 2. Es soll $\operatorname{arc}\sin h$ nach dem Satze von Mac Laurin entwickelt werden.

Zur Bestimmung von $f''(0)$, $f'''(0)$ etc. benutze man (wie im Compendium d. h. Anal. I, § 47) die Recursionsformel

$$f^{(2k+2)}(x) = \frac{(2k+1)\,x f^{(k+1)}(x) + k^2 f^{(k)}(x)}{1-x^2},$$

aus welcher sich zufolge der Anfangswerthe $f(0) = 0$ und $f'(0) = 1$ die weiteren Werthe ergeben

$$f''(0) = 0, \quad f^{IV}(0) = 0, \quad f^{VI}(0) = 0\ldots,$$
$$f'''(0) = 1^2, \quad f^{V}(0) = 1^2\,.\,3^2, \quad f^{VII}(0) = 1^2\,.\,3^2\,.\,5^2\ldots$$

Um den Rest bequem zu gestalten, mache man Gebrauch von der Formel (Compend. I, § 14)

$$D^{n+1}\arcsin x = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n(1-x)^n\sqrt{1-x^2}}\left\{C_0 - C_1\frac{1-x}{1+x} + C_2\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2 - \cdots \right.$$
$$\left. \cdots + (-1)^n C_n\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n\right\},$$

worin

$$C_0 = 1,\quad C_1 = \frac{1\,(n)_1}{2n-1},\quad C_2 = \frac{1.3\,(n)_2}{(2n-1)(2n-3)},$$
$$C_3 = \frac{1.3.5\,(n)_3}{(2n-1)(2n-3)(2n-5)}\ \ldots$$

Die Coefficienten besitzen (wie die Binomialcoefficienten) die Eigenschaft

$$C_0 = C_n,\quad C_1 = C_{n-1},\quad C_2 = C_{n-2},\ldots$$

sie bilden demnach eine aus zwei symmetrischen Hälften bestehende Reihe. Anfangs ist

$$1 = C_0 > C_1 > C_2,\ldots$$

die Coefficienten nehmen also bis zur Mitte der Reihe ab, erreichen dort ein positives Minimum und steigen dann wieder bis $C_n = 1$; mit Ausnahme von C_0 und C_n sind daher alle C positive echte Brüche. Hieraus folgt, dass die Reihe

$$C_0 - C_1\frac{1-x}{1+x} + C_2\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2 - \cdots + (-1)^n C_n\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$$

von $x = 0$ bis $x = 1$ eine endliche Summe $\varphi(x, n)$ besitzt, die selbst im Falle $n = \infty$ endlich bleibt (nämlich $\varphi[x, \infty] = \sqrt{\tfrac{1}{2}[1+x]}$). Man hat also

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n(1-x)^n\sqrt{1-x^2}}\,\varphi(x, n).$$

Auf das mit h^n versehene Reihenglied folgt im Allgemeinen der Rest

$$R_{n+1} = \frac{(1-\vartheta)^{n+1-p}h^{n+1}}{p.1.2.3\ldots n}\,f^{(n+1)}(\vartheta h),$$

mithin im vorliegenden Falle

$$R_{n+1} = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}\cdot\frac{(1-\vartheta)^{n+1-p}h^{n+1}}{p(1-\vartheta h)^{n+\frac{1}{2}}\sqrt{1+\vartheta h}}\,\varphi(\vartheta h, n),$$

wobei man bemerkt, dass $p = \frac{1}{2}$ die günstigste Annahme von p ist, also

$$R_{n+1} = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}\left(\frac{h-\vartheta h}{1-\vartheta h}\right)^{n+\frac{1}{2}}\frac{2\sqrt{h}\,.\,\varphi(\vartheta h, n)}{\sqrt{1+\vartheta h}}.$$

Aus dem bekannten Satze (Compend. I, § 36)

$$Lim \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\dots(\beta+n-1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n-1)} = 0, \text{ wenn } \alpha > \beta > 0$$

folgt für $\alpha = 1$, $\beta = \frac{1}{2}$

$$Lim \frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4.6\dots(2n)} = 0,$$

und da alle übrigen im Reste vorkommenden Factoren endliche Grössen bleiben, so lange h das Intervall 0 bis 1 nicht überschreitet, so ergiebt sich

$$Lim\, R_{n+1} = 0 \quad \text{für } 0 \leq h \leq 1$$

und damit die Reihe für $arc \sin h$. Wegen $arc \sin(-h) = -arc \sin h$ gilt das Resultat weiter von $h = 0$ bis $h = -1$.

§ 40.

Reihenentwickelungen für zusammengesetzte Functionen.

I. Wenn eine Function als Summe oder Product mehrerer anderer Functionen betrachtet werden kann, von denen jede für sich in eine Reihe verwandelbar ist, so erhält man die Entwickelung der zusammengesetzten Function sehr leicht dadurch, dass man die Reihen für die einzelnen Functionen addirt, resp. multiplicirt.

Aufgabe 1. Es soll die Function

$$\frac{1}{1+x+x^2+x^3}$$

in eine nach Potenzen von x fortschreitende Reihe entwickelt werden.

Beachtet man die verschiedenen Formen

$$\frac{1}{1+x+x^2+x^3} = \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1-x}{1+x^2}\right) = \frac{1-x}{1-x^4},$$

so hat man drei verschiedene Mittel zur Entwickelung der gesuchten Reihe, welche für $x^2 < 1$ lautet

$$\frac{1}{1+x+x^2+x^3} = 1 - x + x^4 - x^5 + x^8 - x^9 + x^{12} - x^{13} + \cdots$$

Aufgabe 2. Es soll bewiesen werden, dass die Gleichung

$$\frac{l(1+x)}{1+x} = \frac{1}{1}x - \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2}\right)x^2 + \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)x^3 - \cdots$$

für alle zwischen -1 und $+1$ liegenden x gilt.

Aufgabe 3. Durch Multiplication der Potenzreihen e^{ax} und $\cos x$ entsteht eine Gleichung von der Form

$$e^{ax}\cos x = 1 + \frac{A_1}{1}x + \frac{A_2}{1.2}x^2 + \frac{A_3}{1.2.3}x^3 + \cdots$$

worin sich A_n kurz darstellen lässt, wenn die Formel

$$\frac{\cos n\theta}{\cos^n\theta} = (n)_0 - (n)_2\tan^2\theta + (n)_4\tan^4\theta - (n)_6\tan^6\theta + \cdots$$

benutzt wird. Für $x = z\sin\theta$, $a = \cot\theta$ erhält das Resultat die einfache Gestalt

$$e^{z\cos\theta}\cos(z\sin\theta) = 1 + \frac{z\cos\theta}{1} + \frac{z^2\cos 2\theta}{1.2} + \frac{z^3\cos 3\theta}{1.2.3} + \cdots$$

Auf analoge Weise gelangt man zu der Gleichung

$$e^{z\cos\theta}\sin(z\sin\theta) = \frac{z\sin\theta}{1} + \frac{z^2\sin 2\theta}{1.2} + \frac{z^3\sin 3\theta}{1.2.3} + \cdots$$

Die beiden vorigen Ergebnisse gestatten die vier Combinationen

$$\tfrac{1}{2}(e^{z\cos\theta} + e^{-z\cos\theta})\cos(z\sin\theta) = 1 + \frac{z^2\cos 2\theta}{1.2} + \frac{z^4\cos 4\theta}{1\ldots 4} + \frac{z^6\cos 6\theta}{1\ldots 6} + \cdots$$

$$\tfrac{1}{2}(e^{z\cos\theta} - e^{-z\cos\theta})\cos(z\sin\theta) = \frac{z\cos\theta}{1} + \frac{z^3\cos 3\theta}{1.2.3} + \frac{z^5\cos 5\theta}{1\ldots 5} + \cdots,$$

$$\tfrac{1}{2}(e^{z\cos\theta} + e^{-z\cos\theta})\sin(z\sin\theta) = \frac{z\sin\theta}{1} + \frac{z^3\sin 3\theta}{1.2.3} + \frac{z^5\sin 5\theta}{1\ldots 5} + \cdots,$$

$$\tfrac{1}{2}(e^{z\cos\theta} - e^{-z\cos\theta})\sin(z\sin\theta) = \frac{z^2\sin 2\theta}{1.2} + \frac{z^4\sin 4\theta}{1\ldots 4} + \frac{z^6\sin 6\theta}{1\ldots 6} + \cdots$$

Für $\theta = \frac{1}{4}\pi$ und $\theta = \frac{1}{3}\pi$ entstehen hieraus verschiedene specielle Reihenformeln.

Aufgabe 4. Man soll zeigen, dass für jedes x die Entwickelung gilt

$$e^{ax+\frac{b}{x}} = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \cdots$$
$$+ \frac{B_1}{x} + \frac{B_2}{x^2} + \frac{B_3}{x^3} + \cdots,$$

worin A_n und B_n die Werthe haben

$$A_n = \frac{a^n}{1.2\ldots n}\left\{1 + \frac{ab}{1.(n+1)} + \frac{a^2b^2}{1.2(n+1)(n+2)} + \cdots\right\},$$

$$B_n = \frac{b^n}{1.2\ldots n}\left\{1 + \frac{ab}{1.(n+1)} + \frac{a^2b^2}{1.2(n+1)(n+2)} + \cdots\right\}.$$

Setzt man die Summe der immer convergirenden Reihe

$$1+\frac{u}{1^2}+\frac{u^2}{(1\,.\,2)^2}+\frac{u^3}{(1\,.\,2\,.\,3)^2}+\cdots=\varphi(u),$$

so kann man der vorigen Entwickelung folgende Gestalt verleihen

$$e^{ax+\frac{b}{x}}=\varphi(ab)+\left(ax+\frac{b}{x}\right)\varphi'(ab)+\left(a^2x^2+\frac{b^2}{x^2}\right)\varphi''(ab)+\cdots$$

II. Sehr häufig trifft es sich, dass Betrachtungen der vorigen Art zwar die Möglichkeit einer Reihenentwickelung zeigen, aber das Bildungsgesetz der Coefficienten schwer erkennen lassen; in solchen Fällen ist es gerathen, die Coefficienten einstweilen mit Buchstaben zu bezeichnen und sie nachträglich durch eine oder mehrere Differentiationen zu bestimmen. (Methode der unbestimmten Coefficienten.)

Aufgabe 5. Es soll der Ausdruck

$$[l(1+x)]^2$$

in eine Potenzreihe verwandelt werden. Die Reihe ergiebt sich direct durch Quadrirung der bekannten, unter der Bedingung $x^2<1$ geltenden Potenzreihe für $l(1+x)$; da sich aber das Bildungsgesetz der Coefficienten hierbei nicht unmittelbar übersehen lässt, so setze man

$$\tfrac{1}{2}[l(1+x)]^2=a_2x^2-a_3x^3+a_4x^4-\cdots$$

und differenzire beiderseits. Dies giebt

$$\frac{l(1+x)}{1+x}=2a_2x-3a_3x^2+4a_4x^3-\cdots$$

und durch Vergleich mit der in Aufg. 2 angegebenen Entwickelung

$$2a_2=\tfrac{1}{1},\quad 3a_3=\tfrac{1}{1}+\tfrac{1}{2},\quad 4a_4=\tfrac{1}{1}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3},\cdots$$

Setzt man zur Abkürzung

$$s_n=\tfrac{1}{1}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n},$$

so hat man das Resultat

$$\tfrac{1}{2}[l(1+x)]^2=\tfrac{1}{2}s_1x^2-\tfrac{1}{3}s_2x^3+\tfrac{1}{4}s_3x^4-\cdots,$$
$$x^2<1.$$

Aufgabe 6. Es wird die Reihenentwickelung von

$$[l(1+x)]^3$$

gesucht, wobei $x^2<1$ sein muss.

Setzt man

$$\tfrac{1}{6}[l(1+x)]^3 = b_3 x^3 - b_4 x^4 + b_5 x^5 - \cdots$$

differenzirt und multiplicirt mit $1+x$, so kommt man auf die vorige Entwickelung zurück, wodurch sich die Coefficienten b_3, b_4, b_5, etc. bestimmen. Schliesslich ist

$$\tfrac{1}{6}[l(1+x)]^3 = \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{2}s_1 x^3 - \tfrac{1}{4}(\tfrac{1}{2}s_1 + \tfrac{1}{3}s_2)x^4 + \tfrac{1}{5}(\tfrac{1}{2}s_1 + \tfrac{1}{3}s_2 + \tfrac{1}{4}s_3)x^5 - \cdots,$$
$$x^2 < 1.$$

Auf analoge Weise lassen sich die Ausdrücke

$$\tfrac{1}{24}[l(1+x)]^4, \quad \tfrac{1}{120}[l(1+x)]^5, \ldots$$

in Potenzreihen verwandeln, deren Coefficienten aber immer verwickelter werden.

Aufgabe 7. Es soll der Ausdruck

$$\frac{l(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}$$

in eine Potenzreihe verwandelt werden.

Entwickelt man $(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$ mittelst des binomischen Satzes und $l(x+\sqrt{1+x^2})$ nach Aufgabe 6 in § 38, so erhält man durch Multiplication

$$\frac{l(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} = x - \tfrac{2}{3}x^2 + \tfrac{8}{15}x^5 - \tfrac{16}{35}x^7 + \cdots,$$
$$x^2 < 1,$$

worin das Bildungsgesetz der Coefficienten schwer zu erkennen ist. Man setze deshalb

$$\frac{l(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} = a_1 x - a_3 x^2 + a_5 x^5 - \cdots,$$

multiplicire beiderseits mit $\sqrt{1+x^2}$, differenzire und multiplicire nochmals mit $\sqrt{1+x^2}$; dies giebt

$$1 = a_1 - (3a_3 - 2a_1)x^2 + (5a_5 - 4a_3)x^4 - (7a_7 - 6a_5)x^6 + \cdots$$

und hieraus findet sich der Reihe nach

$$a_1 = 1, \quad a_3 = a_1 \cdot \tfrac{2}{3} = \tfrac{2}{3}, \quad a_5 = a_3 \tfrac{4}{5} = \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}, \ldots$$

mithin

$$\frac{l(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} = x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}x^5 - \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}x^7 + \cdots,$$
$$x^2 < 1.$$

Aufgabe 8. Man verlangt eine Potenzenreihe für den Ausdruck

$$[l(x+\sqrt{1+x^2})]^2.$$

Multiplicirt man die für $l(x+\sqrt{1+x^2})$ gefundene Reihe mit sich selbst, so entsteht ein Resultat von der Form

$$[l(x+\sqrt{1+x^2})]^2 = a_2x^2 - a_4x^4 + a_6x^6 - \cdots,$$
$$x^2 < 1;$$

durch Differentiation kommt man auf die Reihenentwickelung der vorigen Aufgabe zurück und erhält schliesslich

$$[l(x+\sqrt{1+x^2})]^2 = \frac{x^2}{1} - \frac{2}{3}\cdot\frac{x^4}{2} + \frac{2\,.\,4}{3\,.\,5}\cdot\frac{x^6}{3} - \frac{2\,.\,4\,.\,6}{3\,.\,5\,.\,7}\cdot\frac{x^8}{4} + \cdots,$$
$$x^2 < 1.$$

Aufgabe 9. Durch ein ähnliches Verfahren soll folgende Gleichung bewiesen werden

$$\frac{arc\sin x}{\sqrt{1-x^2}} = x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2\,.\,4}{3\,.\,5}x^5 + \frac{2\,.\,4\,.\,6}{3\,.\,5\,.\,7}x^7 + \cdots,$$
$$x^2 < 1,$$

die sich auch in nachstehender Form darstellen lässt

$$arc\tan z = \frac{z}{1+z^2}\left\{1 + \frac{2}{3}\,\frac{z^2}{1+z^2} + \frac{2\,.\,4}{3\,.\,5}\left(\frac{z^2}{1+z^2}\right)^2 + \cdots\right\},$$
$$z^2 < \infty.$$

Aufgabe 10. Es ist folgende Gleichung zu beweisen

$$(arc\sin x)^2 = \frac{x^2}{1} + \frac{2}{3}\,\frac{x^4}{2} + \frac{2\,.\,4}{3\,.\,5}\cdot\frac{x^6}{3} + \frac{2\,.\,4\,.\,6}{3\,.\,5\,.\,7}\cdot\frac{x^8}{4} + \cdots,$$
$$x^2 < 1.$$

Aufgabe 11. Man sucht eine Potenzreihe für den Ausdruck

$$2l\left(\frac{2}{1+\sqrt{1-x}}\right).$$

Entwickelt man zunächst $\sqrt{1-x}$ nach dem binomischen Satze und benutzt nachher die logarithmische Reihe, so erhält man für den vorliegenden Ausdruck

$$\begin{aligned}
&2l\left(\frac{1}{1-\frac{1}{4}x-\frac{1}{16}x^2-\cdots}\right)\\
&= 2\left\{(\tfrac{1}{4}x+\tfrac{1}{16}x^2+\cdots)+\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{4}x+\tfrac{1}{16}x^2+\cdots)^2\right.\\
&\qquad\left.+\tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{4}x+\tfrac{1}{16}x^2+\cdots)^3+\cdots\right\}\\
&= \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{8}x^2 + \tfrac{1}{16}x^3 + \cdots\\
&\qquad + \tfrac{1}{16}x^2 + \tfrac{1}{32}x^3 + \cdots\\
&\qquad\qquad + \tfrac{1}{96}x^3 + \cdots\\
&\qquad\qquad\qquad + \cdots
\end{aligned}$$

Diese Doppelreihe erfüllt die Bedingungen, unter welchen es erlaubt ist, ihre Terme nach Verticalcolonnen zu ordnen; man hat daher

$$2l\left(\frac{1}{1+\sqrt{1-x}}\right)=a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots,$$
$$x^2<1,$$

wo $a_1=\frac{1}{2}$, $a_2=\frac{3}{16}$, $a_3=\frac{5}{48}$ ist. Durch Differentiation gelangt man leicht zu der Gleichung

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}}=1+1a_1x+2a_2x^2+3a_3x^3+\cdots,$$

welche sich mit der Entwickelung von $(1-x)^{-\frac{1}{2}}$ vergleichen lässt; das Endresultat lautet

$$2l\left(\frac{2}{1+\sqrt{1-x}}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{1}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^2}{2}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{x^3}{3}+\cdots,$$
$$x^2<1,$$

oder auch

$$2l\left(\frac{2}{1+z}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-z^2}{1}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{(1-z^2)^2}{2}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{(1-z^2)^3}{3}+\cdots,$$
$$0<z<\sqrt{2}.$$

Die Substitution $z=\cos\theta$ führt zu einer bemerkenswerthen Formel für $l\cos\frac{1}{2}\theta$.

Aufgabe 12. Man verlangt die Entwickelung des Ausdrucks

$$\tfrac{1}{2}\{(1+\sqrt{1-x})^m+(1-\sqrt{1-x})^m\}.$$

Durch Anwendung des binomischen Satzes bringt man die gegebene Function leicht in die Form

$$\begin{aligned}(m)_0+(m)_2(1-x)&+(m)_4(1-x)^2+(m)_6(1-x)^3+\cdots\\ =\ &(m)_0\\ +\ &(m)_2-(m)_2x\\ +\ &(m)_4-2(m)_4x+(m)_4x^2\\ +\ &(m)_6-3(m)_6x+3(m)_6x^2-(m)_6x^3\\ +\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

und zwar gilt diese Transformation für jedes x, wenn m eine ganze positive Zahl ist; bei anderen m dagegen muss x auf das Intervall 0 bis 1 beschränkt werden. Im ersten Falle ist die obige Doppelreihe eine endliche und darf ohne Weiteres nach

Verticalcolonnen geordnet werden, wodurch ein Resultat von folgender Form entsteht

$$\tfrac{1}{2}\{(1+\sqrt{1-x})^m+(1-\sqrt{1-x})^m\}=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots$$

Im zweiten Falle geht die Doppelreihe ins Unendliche fort und darf nur unter der Bedingung in Verticalcolonnen umgesetzt werden, dass die absoluten Werthe der Terme sowohl bei der einen als bei der anderen Anordnung convergente Reihen geben. Diese absoluten Werthe liefern aber, wenn die Horizontalzeilen zusammengezogen werden, die divergente Reihe

$$(m)_0+(m)_2(1+x)+(m)_4(1+x)^2+\cdots,$$
$$0<x<1,$$

mithin kann die ursprünglich gegebene Function für andere als ganze positive m nicht in eine nach Potenzen von x fortschreitende Reihe verwandelt werden. Zu demselben Resultate führt auch die Bemerkung, dass für positive echt gebrochene x

$$\tfrac{1}{2}\{(1+\sqrt{1-x})^m+(1-\sqrt{1-x})^m\}$$
$$=2^{m-1}(1-\tfrac{1}{4}x-\tfrac{1}{16}x^2-\cdots)^m+\frac{x^m}{2^m}(1+\tfrac{1}{4}x+\tfrac{1}{8}x^2+\cdots)^m$$

gesetzt werden kann; ist m keine ganze positive Zahl, so liefert die weitere Entwickelung der rechten Seite keine reine Potenzreihe, sondern ein Gemisch von ganzen positiven und anderen Potenzen des x.

Differenzirt man die Gleichung

$$\tfrac{1}{2}\{(1+\sqrt{1-x})^m+(1-\sqrt{1-x})^m\}=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots$$

und benutzt hierbei die Identitäten

$$(1+\sqrt{1-x})^{m-1}=\frac{(1+\sqrt{1-x})^m}{x}(1-\sqrt{1-x}),$$

$$(1-\sqrt{1-x})^{m-1}=\frac{(1-\sqrt{1-x})^m}{x}(1+\sqrt{1-x}),$$

so erhält man leicht

$$m\,\frac{(1+\sqrt{1-x})^m-(1-\sqrt{1-x})^m}{2\sqrt{1-x}}$$
$$=ma_0+(m-2)a_1x+(m-4)a_2x^2+(m-6)a_3x^3+\cdots$$

Diese Gleichung multiplicire man mit $\sqrt{1-x}$, differenzire wiederum und mache dabei von den vorigen Identitäten Gebrauch; dies giebt

$$m^2 \cdot \frac{(1+\sqrt{1-x})^m + (1-\sqrt{1-x})^m}{2}$$

$$= m^2 a_0 + [(m-2)^2 a_1 - m(m-1) a_0] x$$
$$+ [(m-4)^2 a_2 - (m-2)(m-3) a_1] x^2 + \cdots$$

Der Vergleich mit der ursprünglichen Gleichung liefert die Relation

$$a_k = -\frac{(m-2k+2)(m-2k+1)}{k(m-k)} \cdot \frac{a_{k-1}}{4}$$

und da sich aus der anfänglichen Gleichung für $x = 0$ ergiebt $a_0 = 2^{m-1}$, so können a_1, a_2 etc. der Reihe nach berechnet werden.

Als Endresultat findet man die folgende Gleichung, worin die Reihe bei geradem m mit $x^{\frac{1}{2}m}$, bei ungeradem m mit $x^{\frac{1}{2}(m-1)}$ abzubrechen ist,

$$\frac{(1+\sqrt{1-x})^m + (1-\sqrt{1-x})^m}{2^m}$$

$$= 1 - \frac{m}{1} \cdot \frac{x}{4} + \frac{m(m-3)}{1.2} \left(\frac{x}{4}\right)^2 - \frac{m(m-4)(m-5)}{1.2.3} \left(\frac{x}{4}\right)^3$$
$$+ \frac{m(m-5)(m-6)(m-7)}{1.2.3.4} \left(\frac{x}{4}\right)^4 - \cdots$$

Ferner ist nach einer der vorhergehenden Gleichungen

$$\frac{(1+\sqrt{1-x})^m - (1-\sqrt{1-x})^m}{2^m \sqrt{1-x}}$$

$$= 1 - \frac{m-2}{1} \cdot \frac{x}{4} + \frac{(m-3)(m-4)}{1.2} \left(\frac{x}{4}\right)^2$$
$$- \frac{(m-4)(m-5)(m-6)}{1.2.3} \left(\frac{x}{4}\right)^3 + \cdots$$

Beiläufig sei noch bemerkt, dass man sich nun auch a posteriori von der nur auf ganze positive m beschränkten Giltigkeit dieser Formeln überzeugen kann. So ergiebt sich z. B. aus der ersten Formel für $m = -1$

$$\frac{4}{x} = 1 + \tfrac{1}{4}x + \tfrac{1}{8}x^2 + \cdots$$

und für $m = \frac{1}{2}$

$$\sqrt{1+\sqrt{x}} = 1 - \tfrac{1}{8}x - \tfrac{5}{128}x^2 - \cdots$$

und diese Resultate sind unrichtig.

Aufgabe 13. Mittelst der gewöhnlichen goniometrischen Formeln erhält man leicht folgende Gleichungen

$$\begin{aligned} \cos 2u &= 2\cos^2 u - 1, \\ \cos 3u &= 4\cos^3 u - 3\cos u, \\ \cos 4u &= 8\cos^4 u - 8\cos^2 u + 1, \\ \cos 5u &= 16\cos^5 u - 20\cos^3 u + 5\cos u, \\ \cos 6u &= 32\cos^6 u - 48\cos^4 u + 18\cos^2 u - 1, \end{aligned}$$

u. s. w.,

aus denen hervorgeht, dass bei ganzen positiven m gesetzt werden kann

$$\cos mu = A_0 \cos^m u - A_2 \cos^{m-2} u + A_4 \cos^{m-4} u - \cdots,$$

oder kürzer

$$\cos(m \arccos x) = A_0 x^m - A_2 x^{m-2} + A_4 x^{m-4} - A_6 x^{m-6} + \cdots$$

Differenzirt man diese Gleichung und multiplizirt nachher mit $\sqrt{1-x^2}$, so findet man

$$m \sin(m \arccos x)$$
$$= \sqrt{1-x^2}\{m A_0 x^{m-1} - (m-2) A_2 x^{m-3} + (m-4) A_4 x^{m-5} - \cdots\};$$

diese Gleichung differenzire man wiederum, multiplicire mit $\sqrt{1-x^2}$ und vergleiche das Resultat mit der ursprünglichen Gleichung, man gelangt dann zu folgender Relation

$$4k(m-k)A_{2k} = (m-2k+2)(m-2k+1)A_{2k-2},$$

welche dazu dient, um $A_2, A_4, A_6, \ldots$ durch den vorläufig unbekannt bleibenden Coefficienten A_0 auszudrücken. Man findet

$$A_2 = \frac{m}{1} \cdot \frac{A_0}{2^2}, \quad A_4 = \frac{m(m-3)}{1.2} \cdot \frac{A_0}{2^4} \ldots,$$

$$A_{2k} = \frac{m(m-k-1)(m-k-2)\ldots(m-2k+1)}{1.2.3\ldots k} \cdot \frac{A_0}{2^{2k}}.$$

Um A_0 zu bestimmen, unterscheide man gerade $m = 2n$ und ungerade $m = 2n+1$. Im ersten Falle ist

$$\cos 2nu = A_0 \cos^{2n} u - \cdots + (-1)^{n-1} A_{2n-2} \cos^2 u + (-1)^n A_{2n}$$

und für $u = \frac{1}{2}\pi$

$$\cos n\pi = (-1)^n A_{2n} \text{ d. h. } A_{2n} = 1.$$

Andererseits hat man nach der Formel für A_{2k}, wenn $m = 2n$, $k = n$ gesetzt wird,

$$A_{2n} = 2\frac{A_0}{2^{2n}},$$

mithin, weil A_{2n} nach dem Vorigen bekannt ist,

$$A_0 = 2^{2n-1} = 2^{m-1}.$$

Im Falle $m = 2n+1$ ergiebt sich

$$\frac{\cos(2n+1)u}{\cos u} = A_0 \cos^{2n} u - \cdots + (-1)^{n-1} A_{2n-2} \cos^2 u + (-1)^n A_{2n}$$

und für $u = \frac{1}{2}\pi$

$$(2n+1)\cos n\pi = (-1)^n A_{2n} \text{ d. h. } A_{2n} = 2n+1.$$

Andererseits hat man nach der Formel für A_{2k}, wenn $m = 2n+1$, $k = n$ gesetzt wird,

$$A_{2n} = \frac{2n+1}{1} \cdot \frac{A_0}{2^{2n}},$$

mithin durch Vergleichung mit dem vorigen Werthe von A_{2n}

$$A_0 = 2^{2n} = 2^{m-1}.$$

In allen Fällen ist also $A_0 = 2^{m-1}$, folglich

$$2\cos mu = (2\cos u)^m - \frac{m}{1}(2\cos u)^{m-2} + \frac{m(m-3)}{1.2}(2\cos u)^{m-4}$$
$$- \frac{m(m-4)(m-5)}{1.2.3}(2\cos u)^{m-6} + \cdots$$

und durch Differentiation

$$\frac{\sin mu}{\sin u} = (2\cos u)^{m-1} - \frac{m-2}{1}(2\cos u)^{m-3}$$
$$+ \frac{(m-3)(m-4)}{1.2}(2\cos u)^{m-5} - \frac{(m-4)(m-5)(m-6)}{1.2.3}(2\cos u)^{m-7} + \cdots$$

Aufgabe 14. Man sucht eine Potenzreihe für den Ausdruck

$$\left(\frac{1+\sqrt{1-x}}{2}\right)^{\mu}$$

worin μ eine beliebige reelle Zahl bedeuten soll.

Da überhaupt z^{μ} unter der Form

$$e^{\mu l z} = 1 + \frac{\mu l z}{1} + \frac{(\mu l z)^2}{1.2} + \cdots$$

dargestellt werden kann, so hat man

$$\left(\frac{1+\sqrt{1-x}}{2}\right)^{\mu} = 1 - \frac{\mu}{1} l\left(\frac{2}{1+\sqrt{1-x}}\right) + \frac{\mu^2}{1.2}\left[l\left(\frac{2}{1+\sqrt{1-x}}\right)\right]^2 - \cdots;$$

hier lässt sich die in der 11. Aufgabe entwickelte Reihe benutzen, wodurch die rechte Seite zu folgender Doppelreihe wird, welche an die Bedingung $x^2 < 1$ gebunden ist,

$$\begin{aligned}1-\tfrac{1}{1}\mu\left(\tfrac{1}{4}x+\tfrac{3}{32}x^2+\tfrac{5}{96}x^3+\cdots\right)&\\ +\tfrac{1}{2}\mu^2\left(\tfrac{1}{16}x^2+\tfrac{3}{64}x^3+\cdots\right)&\\ -\tfrac{1}{6}\mu^3\left(\tfrac{1}{64}x^3+\cdots\right)&\\ +\cdots&\end{aligned}$$

Wie leicht zu sehen ist, bleibt diese Doppelreihe auch in dem Falle convergent, wo ihre Terme mit durchaus positiven Zeichen genommen werden; man darf daher nach Verticalcolonnen ordnen und erhält dadurch ein Resultat von der Form

$$\left(\frac{1+\sqrt{1-x}}{2}\right)^\mu = a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots,$$
$$x^2<1,$$

worin die ersten Coefficienten sind

$$a_0=1,\quad a_1=-\frac{\mu}{4},\quad a_2=\frac{\mu^2-3\mu}{32}.$$

Differenzirt man die vorhergehende Gleichung und benutzt die Identität

$$(1+\sqrt{1-x})^{\mu-1}=\frac{(1+\sqrt{1-x})^\mu}{x}(1-\sqrt{1-x}),$$

so gelangt man leicht zu folgendem Resultate

$$\mu\left(\frac{1+\sqrt{1-x}}{2}\right)^\mu=\sqrt{1-x}\{\mu a_0+(\mu-2)a_1x$$
$$+(\mu-4)a_2x^2+(\mu-6)a_3x^3+\cdots\},$$

aus welchem sich durch nochmalige Differentiation ergiebt

$$\mu^2\left(\frac{1+\sqrt{1-x}}{2}\right)^\mu(1-\sqrt{1-x})$$
$$=[1\mu a_0-2(\mu-2)a_1]x+[3(\mu-2)a_1-4(\mu-4)a_2]x^2$$
$$+[5(\mu-4)a_2-6(\mu-6)a_3]x^3+\cdots$$

Multiplicirt man die vorhergehende Gleichung mit $\mu\sqrt{1-x}$ und addirt das Product zur letzten Gleichung, so entsteht

$$\mu^2\left(\frac{1+\sqrt{1-x}}{2}\right)^\mu=\mu^2a_0+[(\mu-2)^2a_1-\mu(\mu-1)a_0]x$$
$$+[(\mu-4)^2a_2-(\mu-2)(\mu-3)a_1]x^2+\cdots$$

Man setze nun linker Hand die ursprüngliche Reihe und vergleiche die beiderseitigen Coefficienten; man erhält dann die Relation

$$a_k = -\frac{(\mu-2k+2)(\mu-2k+1)}{k(\mu-k)}\cdot\frac{a_{k-1}}{4},$$

aus welcher man, mit $a_0 = 1$ beginnend, die Coefficienten a_1, a_2, a_3 etc. bestimmt, was schliesslich zu folgendem Resultate führt

$$\left(\frac{1+\sqrt{1-x}}{2}\right)^\mu$$

$$= 1 - \frac{\mu}{1}\cdot\frac{x}{4} + \frac{\mu(\mu-3)}{1.2}\left(\frac{x}{4}\right)^2 - \frac{\mu(\mu-4)(\mu-5)}{1.2.3}\left(\frac{x}{4}\right)^3$$
$$+ \frac{\mu(\mu-5)(\mu-6)(\mu-7)}{1.2.3.4}\left(\frac{x}{4}\right)^4 - \cdots,$$
$$x^2 < 1.$$

Die Reihe ist dieselbe wie bei der 12. Aufgabe, sie unterscheidet sich aber dadurch von jener, dass sie in jedem Falle (auch bei ganzen positiven μ) ins Unendliche fortgeführt werden muss.

Setzt man $\sqrt{1-x} = 1 - 2z$, so erhält man noch

$$(1-z)^\mu = 1 - \frac{\mu}{1} z(1-z) + \frac{\mu(\mu-3)}{1.2} z^2(1-z)^2$$
$$- \frac{\mu(\mu-4)(\mu-5)}{1.2.3} z^3(1-z)^3 + \cdots,$$
$$-\tfrac{1}{2}(\sqrt{2}-1) < z < +\tfrac{1}{2}.$$

Bemerkenswerthe specielle Fälle hiervon sind

$$\frac{1}{1-z} = 1 + \tfrac{1}{2}(2)_1 z(1-z) + \tfrac{1}{3}(4)_2 z^2(1-z)^2$$
$$+ \tfrac{1}{4}(6)_3 z^3(1-z)^3 + \cdots,$$
$$\frac{1}{(1-z)^2} = 1 + \tfrac{1}{2}(4)_1 z(1-z) + \tfrac{1}{3}(6)_2 z^2(1-z)^2$$
$$+ \tfrac{1}{4}(8)_3 z^3(1-z)^3 + \cdots,$$

Aufgabe 15. Man sucht eine Potenzreihe für die Function

$$(x+\sqrt{1+x^2})^\mu.$$

Durch Anwendung der Identität $z^\mu = e^{\mu\, l z}$ und der in § 38 behandelten Aufgabe 6 bringt man den gegebenen Ausdruck leicht auf folgende Form

$$1 + \tfrac{1}{1}\mu(x - \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{3}{40}x^5 - \cdots)$$
$$+ \tfrac{1}{2}\mu^2(x^2 - \tfrac{1}{3}x^4 + \tfrac{8}{45}x^6 - \cdots)$$
$$+ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots$$

worin $x^2 < 1$ sein muss. Da hier die Doppelreihe auch dann ihre Convergenz behält, wenn alle Terme positiv genommen werden, so hat man für $x^2 < 1$

$$(x+\sqrt{1+x^2})^\mu = a_0 + a_1 x + a_1 x^2 + a_2 x^3 + \cdots,$$

$$a_0 = 1, \quad a_1 = \mu, \quad a_2 = \tfrac{1}{2}\mu^2.$$

Man differenzire die Gleichung, multiplicire mit $\sqrt{1+x^2}$, differenzire noch einmal, multiplicire wieder mit $\sqrt{1+x^2}$ und vergleiche das Resultat mit der anfänglichen Gleichung; man gelangt dann zu der Relation

$$a_{k+2} = a_k \cdot \frac{\mu^2 - k^2}{(k+1)(k+2)}.$$

Mit $a_0 = 1$ anfangend, berechnet man hieraus a_2, a_4, a_6 etc. und von $a_1 = \mu$ ausgehend, a_3, a_5, a_7 etc., wodurch sich ergiebt

$$(\sqrt{1+x^2}+x)^\mu$$

$$= 1 + \frac{\mu^2}{1.2}x^2 + \frac{\mu^2(\mu^2-2^2)}{1.2.3.4}x^4 + \frac{\mu^2(\mu^2-2^2)(\mu^2-4^2)}{1.2\ldots 6}x^6 + \cdots$$

$$+ \frac{\mu}{1}x + \frac{\mu(\mu^2-1^2)}{1.2.3}x^3 + \frac{\mu(\mu^2-1^2)(\mu^2-3^2)}{1.2\ldots 5}x^5 + \cdots,$$

$$x^2 < 1.$$

Lässt man $-x$ an die Stelle von x treten, so entsteht eine zweite ähnliche Gleichung, welche mit der vorigen durch Addition und Subtraction verbunden werden kann.

Aufgabe 16. Es soll die Exponentialgrösse

$$e^{\lambda \arcsin x}$$

in eine Potenzreihe verwandelt werden.

Das Verfahren ist hier fast ganz dasselbe wie bei der vorigen Aufgabe; als Resultat findet sich

$$e^{\lambda \arcsin x} = 1 + \frac{\lambda^2}{1.2}x^2 + \frac{\lambda^2(\lambda^2+2^2)}{1.2.3.4}x^4 + \cdots$$

$$+ \frac{\lambda}{1}x + \frac{\lambda(\lambda^2+1^2)}{1.2.3}x^3 + \cdots,$$

$$x^2 < 1,$$

woraus noch die Entwickelungen von

$$\frac{e^{\lambda \arcsin x} + e^{-\lambda \arcsin x}}{2} \quad \text{und} \quad \frac{e^{\lambda \arcsin x} - e^{-\lambda \arcsin x}}{2}$$

hergeleitet werden können.

Aufgabe 17. Es sind folgende Gleichungen zu beweisen:

$$\cos[\mu l(x+\sqrt{1+x^2})]$$
$$=1-\frac{\mu^2}{1.2}x^2+\frac{\mu^2(\mu^2+2^2)}{1.2.3.4}x^4-\frac{\mu^2(\mu^2+2^2)(\mu^2+4^2)}{1.2\ldots 6}x^6+\cdots,$$
$$x^2<1;$$
$$\sin[\mu l(x+\sqrt{1+x^2})]$$
$$=\frac{\mu}{1}x-\frac{\mu(\mu^2+1^2)}{1.2.3}x^3+\frac{\mu(\mu^2+1^2)(\mu^2+3^2)}{1.2\ldots 5}x^5-\cdots,$$
$$x^2<1.$$

Die Entwickelung geschieht hier nach einem ähnlichen Verfahren wie bei den vorigen Aufgaben. Durch Substitution von

$$l(x+\sqrt{1+x^2})=z$$

erhalten die vorigen Gleichungen bemerkenswerthe neue Formen.

Aufgabe 18. Unter der Voraussetzung beliebiger μ soll die Function

$$\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^\mu=(1+x)^\mu(1-x)^{-\mu}$$

entwickelt werden.

Durch Ausführung der angedeuteten Multiplication folgt augenblicklich, dass für echt gebrochene x eine Gleichung von folgender Form besteht

$$\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^\mu=1+C_1x+C_2x^2+C_3x^3+\cdots,$$
$$-1<x<+1,$$

und dass der Coefficient C_n durch die Formel bestimmt ist

$$C_n=(-\mu)_0(\mu)_n-(-\mu)_1(\mu)_{n-1}+(-\mu)_2(\mu)_{n-2}-\cdots$$
$$\cdots+(-1)^n(-\mu)_n(\mu)_0.$$

Hiernach sind die sechs ersten Coefficienten

$$C_1=2\mu,$$
$$C_2=2\mu^2,$$
$$C_3=\tfrac{2}{3}(2\mu^3+\mu),$$
$$C_4=\tfrac{2}{3}(\mu^4+2\mu^2),$$
$$C_5=\tfrac{1}{15}(2\mu^5+10\mu^3+3\mu),$$
$$C_6=\tfrac{2}{45}(2\mu^6+20\mu^4+23\mu^2).$$

Da die Function $(1+x)^\mu(1-x)^{-\mu}$ dieselbe bleibt, wenn man x gegen $-x$ und gleichzeitig μ gegen $-\mu$ vertauscht, so erklärt es sich, dass C_{2k} nur gerade, C_{2k+1} nur ungerade Potenzen von μ enthält.

Da für hinreichend kleine x

$$\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^\mu = \left(1+\frac{2x}{1-x}\right)^\mu$$

$$= 1 + (\mu)_1 2x(1-x)^{-1} + (\mu)_2(2x)^2(1-x)^{-2} + \cdots$$

gesetzt werden kann, so ergiebt sich durch weitere Entwickelung der Potenzen von $1-x$ eine zweite, etwas bequemere Formel für C_n, nämlich

$$C_n = 2(n-1)_0(\mu)_1 + 2^2(n-1)_1(\mu)_2 + 2^3(n-1)_2(\mu)_3 + \cdots$$
$$\cdots + 2^n(\mu-1)_{n-1}(\mu)_n.$$

Will man nicht jeden Coefficienten für sich (independent), sondern einen Coefficienten nach dem andern (recurrirend) berechnen, so differenzire man die Gleichung

$$\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^\mu = 1 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \cdots$$

nach x, multiplicire den erhaltenen Differentialquotient mit $1-x^2$ und vergleiche das Product mit dem 2μ-fachen der vorstehenden Gleichung; man erhält dann die Recursionsformel

$$C_{n+2} = \frac{2\mu C_{n+1} + nC_n}{n+2},$$

aus welcher man, mit $C_0 = 1$ und $C_1 = 2\mu$ anfangend, der Reihe nach C_2, C_3, $C_4, \ldots$ berechnen kann.

Analog der vorstehenden Formel sind die folgenden

$$C_{n+1} = \frac{2\mu C_n + (n-1)C_{n-1}}{n+1}, \quad C_n = \frac{2\mu C_{n-1} + (n-2)C_{n-2}}{n};$$

eliminirt man C_{n+1} und C_{n-1} aus diesen drei Gleichungen, so bleibt eine Gleichung zwischen C_{n+2}, C_n, C_{n-2} übrig, welche sich folgendermassen schreiben lässt:

$$C_{n+2} = \frac{(4\mu^2 + 2n^2)C_n - (n-1)(n-2)C_{n-2}}{(n+1)(n+2)};$$

sie dient für $n = 2, 4, 6, \ldots$ zur Berechnung der Coefficienten von geradem Index, für $n = 3, 5, 7, \ldots$ zur Berechnung der Coefficienten von ungeradem Index.

Setzt man in der gewonnenen Entwickelung

$$x = \frac{z}{2+z},$$

so erhält dieselbe folgende Gestalt

$$(1+z)^\mu = 1 + C_1 \frac{z}{2+z} + C_2 \left(\frac{z}{2+z}\right)^2 + \cdots, \quad z > 1.$$

Aufgabe 19. Es soll die Function $\cos(2\mu \operatorname{arc} \tan x)$ nach Potenzen von x entwickelt werden.

Durch Anwendung der Cosinusreihe und der bekannten Entwickelung von $\operatorname{arc} \tan x$ findet man zunächst, dass eine Gleichung von der Form besteht

$$\cos(2\mu \operatorname{arc} \tan x) = A_0 - A_2 x^2 + A_4 x^4 - A_6 x^6 + \cdots,$$
$$-1 < x < +1,$$

worin $A_0 = 1$ und $A_2 = 2\mu^2$ ist. Um die übrigen Coefficienten zu bestimmen, differenzire man die Gleichung nach x, multiplicire den Differentialquotienten mit $1 + x^2$, differenzire das Product wieder nach x, multiplicire nochmals mit $1 + x^2$ und vergleiche das so erhaltene Resultat mit dem Producte aus $4\mu^2$ und der obigen Gleichung; man hat dann

$$4\mu^2 A_n = (n+1)[(n+2)A_{n+2} - nA_n)] - (n-1)[nA_n - (n-2)A_{n-2}]$$

oder

$$A_{n+2} = \frac{(4\mu^2 + 2n^2)A_n - (n-1)(n-2)A_{n-2}}{(n+1)(n+2)}.$$

Diese Formel stimmt mit der letzten Recursionsformel in der vorigen Aufgabe überein; da ausserdem $A_0 = C_0$ und $A_2 = C_2$ ist, so folgt, dass die Coefficienten $A_4, A_6 \ldots$ identisch mit den Coefficienten $C_4, C_6 \ldots$ sind.

Setzt man noch $2 \operatorname{arc} \tan x = w$, so folgt

$$\cos \mu w = 1 - C_2 \tan^2 \tfrac{1}{2} w + C_4 \tan^4 \tfrac{1}{2} w - C_6 \tan^6 \tfrac{1}{2} w + \cdots,$$
$$-\tfrac{1}{2}\pi < w < +\tfrac{1}{2}\pi.$$

Aufgabe 20. Die Function $\sin(2\mu \operatorname{arc} \tan x)$ soll nach Potenzen von x entwickelt werden.

Behandelt man die Aufgabe ganz analog der vorigen, so findet man zunächst, dass eine Entwickelung von der Form besteht

$$\sin(2\mu \operatorname{arc\,tan} x) = B_1 x - B_3 x^3 + B_5 x^5 - \cdots,$$
$$-1 < x < +1,$$

worin $B_1 = 2\mu$ und $B_3 = \frac{2}{3}(2\mu^3 + \mu)$ ist. Man erhält ferner die Recursionsformel

$$B_{n+2} = \frac{(4\mu^2 + 2n^2) B_{n+1} - (n-1)(n-2) B_{n-2}}{(n+1)(n+2)},$$

woraus in Verbindung mit dem Vorigen die Identität der Coefficienten $B_1, B_3, B_5 \ldots$ und $C_1, C_3, C_5 \ldots$ in Aufgabe 18 folgt.

Für $2 \operatorname{arc\,tan} x = w$ ergiebt sich noch

$$\sin \mu w = C_1 \tan \tfrac{1}{2} w - C_3 \tan^3 \tfrac{1}{2} w + C_5 \tan^5 \tfrac{1}{2} w - \cdots,$$
$$-\tfrac{1}{2}\pi < w < +\tfrac{1}{2}\pi.$$

Aufgabe 21. Unter der Voraussetzung, dass für hinreichend kleine Werthe von x^2 die Gleichung

$$l(1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots)$$
$$= b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4 + \cdots$$

bestehen kann, sollen die Coefficienten b_1, b_2, b_3 aus den gegebenen Coefficienten a_1, a_2, a_3 etc. hergeleitet werden.

Differenzirt man beiderseits, schafft nachher den Bruch weg und vergleicht die Coefficienten, so gelangt man zu den Relationen

$$\begin{aligned}
1 a_1 &= 1 b_1,\\
2 a_2 &= 1 a_1 b_1 + 2 b_2,\\
3 a_3 &= 1 a_2 b_1 + 2 a_1 b_2 + 3 b_3,\\
4 a_4 &= 1 a_3 b_1 + 2 a_2 b_2 + 3 a_1 b_3 + 4 b_4,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

aus denen sich successive b_1, b_2, b_3 etc. berechnen lassen.

Um hiervon eine Anwendung zu machen, werde vorausgesetzt, dass die n Wurzeln der Gleichung

$$z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0$$

bekannt und zwar reell seien; sie mögen $z_1, z_2, \ldots z_n$ heissen. Nach einem Satze aus der Theorie der algebraischen Gleichungen ist dann

$$z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_{n-1} z + a_n$$
$$= (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) \ldots (z - z_n),$$

mithin für $z = \dfrac{1}{x}$

$$1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$
$$= (1 - z_1 x)(1 - z_2 x)(1 - z_3 x) \ldots (1 - z_n x).$$

Nimmt man beiderseits die Logarithmen und wählt x so klein, dass die absoluten Werthe aller der Producte $z_1 x, z_2 x, \dots z_n x$ echte Brüche sind, so kann man rechter Hand sämmtliche n Logarithmen mittelst der Formel

$$l(1-\xi) = -\tfrac{1}{1}\xi - \tfrac{1}{2}\xi^2 - \tfrac{1}{3}\xi^3 - \cdots$$

entwickeln und erhält

$$\begin{aligned} & l(1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n) \\ = & -\tfrac{1}{1}(z_1 + z_2 + z_3 + \cdots + z_n)x \\ & -\tfrac{1}{2}(z_1^2 + z_2^2 + \quad \cdots + z_n^2)x^2 \\ & -\tfrac{1}{3}(z_1^3 + z_2^3 + \quad \cdots + z_n^3)x^3 \\ & - \cdots \end{aligned}$$

oder, wenn zur Abkürzung

$$z_1^k + z_2^k + \cdots + z_n^k = s_k$$

gesetzt wird,

$$\begin{aligned} & l(1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n) \\ = & -\tfrac{1}{1}s_1 x - \tfrac{1}{2}s_2 x^2 - \tfrac{1}{3}s_3 x^3 - \cdots \end{aligned}$$

Man hat hier eine Entwickelung der anfangs vorausgesetzten Art und zwar ist

$$a_{n+1} = a_{n+2} \cdots = 0, \quad b_k = -\frac{1}{k}s_k,$$

mithin gelten folgende Relationen

$$\begin{aligned} 0 &= 1a_1 + s_1, \\ 0 &= 2a_2 + a_1 s_1 + s_2, \\ 0 &= 3a_3 + a_2 s_1 + a_1 s_2 + s_3, \\ 0 &= 4a_4 + a_3 s_1 + a_2 s_2 + a_1 s_3 + s_4, \\ & \cdots \end{aligned}$$

Die Grössen s_1, s_2, s_3 etc. lassen sich also direct aus den Coefficienten der gegebenen algebraischen Gleichung herleiten, ohne dass es nöthig wäre, die Gleichung aufzulösen.

Aufgabe 22. Unter der Voraussetzung, dass für hinreichend kleine x^2 die Gleichung

$$\begin{aligned} & (1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots)^\mu \\ = & 1 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4 + \cdots \end{aligned}$$

bestehen kann, sollen die Coefficienten b_1, b_2, b_3 etc. aus den gegebenen Coefficienten a_1, a_2, a_3 etc. hergeleitet werden.

Nimmt man beiderseits die Logarithmen, differenzirt und verfährt im Uebrigen wie bei der vorigen Aufgabe, so gelangt man zu folgenden Relationen

$$
\begin{aligned}
1b_1 &= \mu a_1,\\
2b_2 &= (\mu-1)a_1b_1 + 2\mu a_2,\\
3b_3 &= (\mu-2)a_1b_2 + (2\mu-1)a_2b_1 + 3\mu a_3,\\
4b_4 &= (\mu-3)a_1b_3 + (2\mu-2)a_2b_2 + (3\mu-1)a_3b_1 + 4\mu a_4,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

welche zur successiven Berechnung von b_1, b_2, b_3 etc. dienen.

Für den speciellen Fall $\mu = \frac{1}{2}$ ist z. B.

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{1 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots}\\
&= 1 + \tfrac{1}{2}a_1x + (\tfrac{1}{2}a_2 - \tfrac{1}{8}a_1^2)x^2 + (\tfrac{1}{2}a_3 - \tfrac{1}{4}a_2a_1 + \tfrac{1}{16}a_1^3)x^3\\
&\quad + (\tfrac{1}{2}a_4 - \tfrac{1}{4}a_3a_1 - \tfrac{1}{8}a_2^2 + \tfrac{3}{16}a_2a_1^2 - \tfrac{5}{128}a_1^3)x^4 + \cdots
\end{aligned}
$$

wobei die Coefficienten bald sehr zusammengesetzte Ausdrücke werden, deren independentes Bildungsgesetz zwar durch gewisse Formeln der Combinationslehre dargestellt werden kann, aber keinen wesentlichen praktischen Vortheil gewährt.

Um hiervon eine Anwendung zu machen, schicken wir folgende Bemerkung voraus. Bezeichnen α und $\beta < \alpha$ zwei beliebige positive Grössen, so lassen sich zwei Reihen neuer Zahlen α_1, α_2, $\alpha_3, \ldots$ und β_1, β_2, $\beta_3, \ldots$ mittelst nachstehender Formeln berechnen

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 &= \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta), & \beta_1 &= \sqrt{\alpha\beta}\\
\alpha_2 &= \tfrac{1}{2}(\alpha_1 + \beta_1), & \beta_2 &= \sqrt{\alpha_1\beta_1},\\
\alpha_3 &= \tfrac{1}{2}(\alpha_2 + \beta_2), & \beta_3 &= \sqrt{\alpha_2\beta_2},\\
&\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

so dass immer

$$\alpha_{k+1} = \tfrac{1}{2}(\alpha_k + \beta_k), \quad \beta_{k+1} = \sqrt{\alpha_k\beta_k}$$

ist. Nach dieser Formel hat man

$$\alpha_{k+1} - \beta_{k+1} = \tfrac{1}{2}(\sqrt{\alpha_k} - \sqrt{\beta_k})^2$$

und ferner mittelst einer leichten Umwandlung

$$\frac{\alpha_{k+1} - \beta_{k+1}}{\alpha_k - \beta_k} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha_k - \beta_k}{(\sqrt{\alpha_k} + \sqrt{\beta_k})^2} = \tfrac{1}{2}\varepsilon_k,$$

wo ε_k einen echten Bruch bedeutet, auf dessen Werth es nicht ankommt. Setzt man in der vorigen Gleichung $k = 0, 1, 2, \ldots (n-1)$, wobei $\alpha_0 = \alpha$, $\beta_0 = \beta$ zu nehmen ist, und multiplicirt alle entstehenden Gleichungen, so erhält man

$$\alpha_n - \beta_n = (\tfrac{1}{2})^n(\alpha - \beta)\,\varepsilon_0\varepsilon_1\varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{n-1},$$

und hieraus folgt für $n = \infty$, weil $(\alpha - \beta)\varepsilon_0 \ldots \varepsilon_{n-1}$ immer einen endlichen Werth behält,

$$Lim(\alpha_n - \beta_n) = 0.$$

Die Grössen α_n und β_n convergiren also gegen einen und denselben Grenzwerth, welcher das arithmetisch-geometrische Mittel zwischen α und β heisst und im Folgenden mit $M(\alpha, \beta)$ bezeichnet werden soll.

Um diesen Grenzwerth mittelst einer unendlichen Reihe zu berechnen, setze man den echten Bruch

$$\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}=\lambda, \text{ mithin } \beta=\alpha\frac{1-\lambda}{1+\lambda};$$

es ist dann

$$\alpha_1=\alpha\frac{1}{1+\lambda}=\alpha(1-\lambda+\lambda^2-\lambda^3+\lambda^4-\cdots),$$

$$\beta_1=\alpha\sqrt{\frac{1-\lambda}{1+\lambda}}=\alpha(1-\lambda+\tfrac{1}{2}\lambda^2-\tfrac{1}{2}\lambda^3+\tfrac{3}{8}\lambda^4-\cdots),$$

ferner, wenn für α_1 und β_1 die vorstehenden Reihen benutzt werden,

$$\alpha_2=\alpha(1-\lambda+\tfrac{3}{4}\lambda^2-\tfrac{3}{4}\lambda^3+\tfrac{11}{16}\lambda^4-\cdots)$$

$$\beta_2=\alpha\sqrt{1-2\lambda+\tfrac{5}{2}\lambda^2-3\lambda^3+\tfrac{27}{8}\lambda^4-\cdots}$$

$$=\alpha(1-\lambda+\tfrac{3}{4}\lambda^2-\tfrac{3}{4}\lambda^3+\tfrac{51}{32}\lambda^4-\cdots).$$

Auf diesem Wege fortgehend erhält man die Reihe

$$M(\alpha,\beta)=\alpha(1-\lambda+\tfrac{3}{4}\lambda^2-\tfrac{3}{4}\lambda^3+\tfrac{71}{64}\lambda^4-\cdots),$$

deren Coefficienten ein ziemlich verwickeltes, mit den bisherigen Mitteln nicht entdeckbares Bildungsgesetz befolgen. Beispielsweise findet sich für $\alpha=7$, $\beta=3$ durch directe Berechnung

$$\alpha_4=4{,}78901\,35832, \quad \beta_4=4{,}78901\,35831;$$

denselben Werth liefert die Reihe für $\alpha=7$ und $\lambda=0{,}4$.

§ 41.

Näherungsweise Summirung von Reihen.

In der bekannten Relation

$$\frac{F(b)-F(a)}{b-a}=F'(a+\vartheta[b-a]), \quad 0<\vartheta<1,$$

nehme man der Reihe nach

$$a=0, \quad z, \quad 2z, \quad 3z, \ldots (n-1)z,$$
$$b=z, \quad 2z, \quad 3z, \quad 4z, \ldots nz;$$

durch Addition aller entstehenden Gleichungen folgt dann

$$\frac{F(nz)-F(0)}{z}=F'(\vartheta_0 z)+F'(z+\vartheta_1 z)+F'(2z+\vartheta_2 z)+\cdots$$
$$\cdots+F'([n-1]z+\vartheta_{n-1}z),$$

wobei $F(x)$ und $F'(x)$ stetig und endlich bleiben müssen von $x=0$ bis $x=nz$, während $\vartheta_0, \vartheta_1, \vartheta_2, \ldots \vartheta_{n-1}$ nicht genauer bestimmte positive echte Brüche bedeuten. Unter der Voraussetzung, dass $F'(x)$ innerhalb des Intervalles $x=0$ bis $x=nz$ fortwährend abnimmt, ist weiter

$$F'(0)>F'(\vartheta_0 z)>F'(z),$$
$$F'(z)>F'(z+\vartheta_1 z)>F'(2z),$$
$$F'(2z)>F'(2z+\vartheta_2 z)>F'(3z),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$F'([n-1]z)>F'([n-1)z+\vartheta_{n-1}z)>F'(nz),$$

und mit Hilfe dieser Ungleichungen folgt aus der vorigen Gleichung, dass die Summe

$$F'(0)+F'(z)+F'(2z)+\cdots+F'([n-1]z)$$

mehr beträgt als

$$\frac{F(nz)-F(0)}{z},$$

dagegen weniger als

$$\frac{F(nz)-F(0)}{z}+F'(0)-F'(nz).$$

Bezeichnet ε einen nicht näher angebbaren positiven echten Bruch, so ist hiernach

$$F'(0)+F'(z)+F'(2z)+\cdots+F'([n-1]z)$$
$$=\frac{F(nz)-F(0)}{z}+\varepsilon[F'(0)-F'(nz)].$$

Für $\varepsilon=\frac{1}{2}$, was dem arithmetischen Mittel der beiden extremen Werthe entspricht, erhält man einen Näherungswerth der Reihensumme.

Im Fall $F(nz)$ und $F'(nz)$ bei unendlich wachsenden n gegen bestimmte Grenzwerthe convergiren, ergiebt sich ein Näherungswerth für die Summe einer unendlichen Reihe.

Beispiel 1. Die Functionen

$$F(x)=arc\,tan\,(e^x), \quad F'(x)=\frac{1}{e^x+e^{-x}}$$

erfüllen die gemachten Voraussetzungen; für $n=\infty$ und $\varepsilon=\frac{1}{2}$ hat man daher die Näherungsformel

$$\frac{1}{e^z + e^{-z}} + \frac{1}{e^{2z} + e^{-2z}} + \frac{1}{e^{3z} + e^{-3z}} + \cdots = \tfrac{1}{4}\left(\frac{\pi}{z} - 1\right)$$

oder, wenn $e^z = \xi$ gesetzt wird, wobei $\xi > 1$ sein muss,

$$\frac{\xi}{1+\xi^2} + \frac{\xi^2}{1+\xi^4} + \frac{\xi^3}{1+\xi^6} + \cdots = \tfrac{1}{4}\left(\frac{\pi}{l\xi} - 1\right).$$

Im Falle $e^{-z} = \eta$ erhält man ebenso wie für $\xi = \dfrac{1}{\eta}$

$$\frac{\eta}{1+\eta^2} + \frac{\eta^2}{1+\eta^4} + \frac{\eta^3}{1+\eta^6} + \cdots = \tfrac{1}{4}\left(\frac{\pi}{-l\eta} - 1\right),$$

wobei $0 < \eta < 1$ sein muss. Die links stehenden Reihen convergiren mit alleiniger Ausnahme der Fälle $\xi = 1$ und $\eta = 1$; liegt nun ξ oder η der Einheit nahe, so geht die Convergenz so langsam, dass man eine sehr grosse Gliederzahl berechnen müsste, um nur einige Genauigkeit zu erreichen. So ist z. B. für $\xi = 1\frac{1}{9}$ oder $\eta = 0{,}9$

$$\frac{\eta^{50}}{1+\eta^{100}} = 0{,}00515,$$

wonach die Summe von 50 Reihengliedern nicht einmal zwei sichere Decimalstellen geben würde. In Fällen dieser Art leistet die angegebene Näherungsformel gute Dienste; sie liefert für $\eta = 0{,}9$ die Summe

$$\tfrac{1}{4}\left(\frac{\pi}{l10 - l9} - 1\right) = 7{,}2044$$

statt des genauen Werthes 7,2060, der sich auf anderem Wege (mittelst elliptischer Functionen) findet.

An das Vorige knüpfen sich noch die Näherungsformeln

$$\frac{\eta}{1+\eta^2} + \frac{\eta^3}{1+\eta^6} + \frac{\eta^5}{1+\eta^{10}} + \cdots = \frac{\pi}{-8l\eta},$$

$$\frac{\eta}{1+\eta^2} - \frac{\eta^2}{1+\eta^4} + \frac{\eta^3}{1+\eta^6} - \frac{\eta^4}{1+\eta^8} + \cdots = \frac{1}{4}.$$

Beispiel 2. Es sei

$$F(x) = l\left(\frac{x}{1-e^{-x}}\right) \text{ mithin } F'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1};$$

beide Functionen bleiben endlich und stetig von $x = 0$ bis zu jedem beliebigen positiven Werthe des x. Da ferner $F''(x)$ unter der Form

$$F''(x) = -\frac{2e^x}{x^2(e^x-1)^2}\left\{\frac{e^x+e^{-x}}{2}-1-\frac{x^2}{2}\right\}$$

dargestellt werden kann, so erhellt, dass $F''(x)$ immer negativ ist, dass also $F'(x)$ unausgesetzt abnimmt von $F'(0) = \frac{1}{2}$ bis $F'(\infty) = 0$. Hiernach ergiebt sich

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{2}+\frac{1}{z}+\frac{1}{2z}+\frac{1}{3z}+\cdots+\frac{1}{(n-1)z}\\ &-\frac{1}{e^z-1}-\frac{1}{e^{2z}-1}-\frac{1}{e^{3z}-1}-\cdots-\frac{1}{e^{(n-1)z}-1}\\ &=\frac{1}{z}\,l\left(\frac{nz}{1-e^{-nz}}\right)+\varepsilon\left\{\tfrac{1}{2}-\frac{1}{nz}+\frac{1}{e^{nz}-1}\right\}\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}&\frac{1}{e^z-1}+\frac{1}{e^{2z}-1}+\frac{1}{e^{3z}-1}+\cdots+\frac{1}{e^{(n-1)z}-1}\\ &=\tfrac{1}{2}+\left(\tfrac{1}{1}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}-ln\right)\frac{1}{z}\\ &-\frac{lz}{z}+\frac{1}{z}\,l\left(\frac{1}{1-e^{-nz}}\right)-\varepsilon\left\{\tfrac{1}{2}-\frac{1}{nz}+\frac{1}{e^{nz}-1}\right\}.\end{aligned}$$

Geht man zur Grenze für unendlich wachsende n über und berücksichtigt das in Nr. 23 der Einleitung gefundene Resultat, so erhält man

$$\frac{1}{e^z-1}+\frac{1}{e^{2z}-1}+\frac{1}{e^{3z}-1}+\cdots=\tfrac{1}{2}(1-\varepsilon)+\frac{C-lz}{z},\quad (C=0{,}5772157).$$

Für $e^{-z}=\zeta$ und $\varepsilon=\frac{1}{2}$ ergiebt sich hieraus die Näherungsformel

$$\frac{\zeta}{1-\zeta}+\frac{\zeta^2}{1-\zeta^2}+\frac{\zeta^3}{1-\zeta^3}+\cdots=\tfrac{1}{4}+\frac{C-l(-l\zeta)}{-l\zeta},\quad 0<\zeta<1.$$

Die hier vorkommende Reihe lässt sich nach Potenzen von ζ ordnen und erhält dann die Form

$$t_1\zeta+t_2\zeta^2+t_3\zeta^3+t_4\zeta^4+\cdots;$$

darin ist, wie zuerst Lambert bemerkt hat, t_n gleich der Anzahl der Theiler von n, incl. 1 und n; für jede Primzahl p und nur für diese ist daher $t_p=2$.

Bei kleinen ζ convergirt die Reihe so gut, dass man ihre Summe durch directe numerische Rechnung finden kann, namentlich wenn folgende Transformation beachtet wird. Schreibt man die Einzelreihen für

$$\frac{\zeta}{1-\zeta}, \quad \frac{\zeta^2}{1-\zeta^2}, \quad \frac{\zeta^3}{1-\zeta^3}, \dots$$

einfach unter einander, so erhält man die Doppelreihe

$$\begin{array}{l} \zeta + \zeta^2 + \zeta^3 + \zeta^4 + \cdots \\ + \zeta^2 + \zeta^4 + \zeta^6 + \zeta^8 + \cdots \\ + \zeta^3 + \zeta^6 + \zeta^9 + \zeta^{12} + \cdots \\ + \zeta^4 + \zeta^8 + \zeta^{12} + \zeta^{16} + \cdots \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{array}$$

die erste Horizontalreihe und die erste Verticalcolonne geben zusammen

$$\zeta + 2\zeta^2 + 2\zeta^3 + 2\zeta^4 + \cdots = \frac{1+\zeta}{1-\zeta}\zeta$$

und es bleibt die Doppelreihe übrig

$$\begin{array}{l} \zeta^4 + \zeta^6 + \zeta^8 + \cdots \\ + \zeta^6 + \zeta^9 + \zeta^{12} + \cdots \\ + \zeta^8 + \zeta^{12} + \zeta^{16} + \cdots \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{array}$$

Die Vereinigung der ersten Reihe mit der ersten Colonne liefert

$$\zeta^4 + 2\zeta^6 + 2\zeta^8 + \cdots = \frac{1+\zeta^2}{1-\zeta^2}\zeta^4;$$

setzt man dieses Verfahren fort, so erhält man statt der Lambertschen Reihe die folgende

$$\frac{1+\zeta}{1-\zeta}\zeta + \frac{1+\zeta^2}{1-\zeta^2}\zeta^4 + \frac{1+\zeta^3}{1-\zeta^3}\zeta^9 + \frac{1+\zeta^4}{1-\zeta^4}\zeta^{16} + \cdots,$$

welche bei kleinen ζ sehr rasch convergirt. So genügen z. B. für $\zeta = 0{,}4$ fünf Glieder, um die Summe auf neun Decimalen genau zu finden, nämlich 0,968984159.

Bei grossen, d. h. der Einheit nahe kommenden ζ gewährt diese Transformation keine bedeutende Hilfe, denn z. B. für $\zeta = 0{,}99$ ist

$$\frac{1+(0{,}99)^{40}}{1-(0{,}99)^{40}}(0{,}99)^{1600} = 0{,}000\,000\,5,$$

wonach sechs genaue Decimalstellen die Berechnung von mehr als 40 Gliedern erfordern. In solchen Fällen erweist sich die Näherungsformel sehr brauchbar; sie giebt z. B. für $\zeta = 0{,}99$

$$0{,}25 + \frac{0{,}5772157 - l(0{,}0100503)}{0{,}0100503}$$

$$= 0{,}25 + \frac{0{,}5772157 + 4{,}6001488}{0{,}0100503} = 515{,}3932$$

und diese Summe differirt sehr wenig von dem genauen Werthe 515,39315, der sich aus einer Correction der Näherungsformel findet. (Compend. d. höh. Anal. Bd. II, S. 237.)

§ 42.

Näherungsweise Darstellung gegebener Functionen.

Wenn die Potenzreihen für zwei verschiedene Functionen in mehreren anfänglichen Termen übereinstimmen, so ist zu erwarten, dass die beiden Functionen — wenigstens bei kleinen Werthen der Variabelen — nicht sehr von einander differiren werden, dass man folglich die eine der beiden Functionen als eine genäherte Darstellung der anderen betrachten darf. Aus dieser Bemerkung entspringen zwei Aufgaben: erstens, zu einer gegebenen Function eine ihr nahekommende zu finden, und zweitens, den Grad der Annäherung, d. h. das Maximum der Differenz beider Functionen zu bestimmen. Das folgende Beispiel wird zeigen, wie derartige Aufgaben zu behandeln sind.

Beispiel 1. Die drei Constanten α, β, γ sollen so bestimmt werden, dass die Gleichung

$$l(1+x) = \frac{x(\alpha + \beta x)}{1 + \gamma x}$$

möglichst genau stattfindet.

Einerseits ist unter der Bedingung $x^2 < 1$

$$l(1+x) = \tfrac{1}{1}x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \cdots,$$

andererseits, wenn $\gamma^2 x^2 < 1$ genommen wird,

$$\frac{x(\alpha + \beta x)}{1 + \gamma x} = x\left\{\alpha - \frac{(\alpha\gamma - \beta)x}{1 + \gamma x}\right\}$$

$$= \alpha x - (\alpha\gamma - \beta)x^2 + (\alpha\gamma - \beta)\gamma x^3 - (\alpha\gamma - \beta)\gamma^2 x^4 + \cdots;$$

setzt man in beiden Reihen die Coefficienten von x, x^2 und x^3 gleich, so hat man drei Gleichungen zur Bestimmung der drei Unbekannten α, β, γ und erhält $\alpha = 1$, $\beta = \frac{1}{6}$, $\gamma = \frac{2}{3}$. Demnach ist

$$l(1+x) - \frac{x(6+x)}{6+4x}$$
$$= -\{(\tfrac{1}{4} - \tfrac{2}{9})x^4 - (\tfrac{1}{5} - \tfrac{4}{27})x^5 + (\tfrac{1}{6} - \tfrac{8}{81})x^6 - \cdots\},$$

und zwar müssen hier die Bedingungen $x^2 < 1$, $\frac{4}{9}x^2 < 1$ gleichzeitig erfüllt sein, wozu $x^2 < 1$ genügt. Für die letzte Reihe gilt nun die Bemerkung

$$(\tfrac{1}{4} - \tfrac{2}{9})x^4 + (\tfrac{1}{5} - \tfrac{4}{27})x^5 + (\tfrac{1}{6} - \tfrac{8}{81})x^6 + \cdots$$
$$< \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{4}x^5 + \tfrac{1}{4}x^6 + \cdots$$

und es ist daher

$$l(1+x) = \frac{x(6+x)}{6+4x} - \frac{\varrho x^4}{1-x}, \quad x^2 < 1,$$

wo ϱ zwischen 0 und $\frac{1}{4}$ liegt.

Dasselbe Verfahren gestattet folgende kleine Modification, die meistens bequemer sein dürfte. Man setze

$$l(1+x) - \frac{x(\alpha+\beta x)}{1+\gamma x} = R,$$

multiplicire mit $1+\gamma x$ und substituire für $l(1+x)$ die gleichgeltende Potenzreihe; es ist dann

$$(1+\gamma x)R$$
$$= (1-\alpha)x + (\gamma - \beta - \tfrac{1}{2})x^2 + (\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2}\gamma)x^3$$
$$- (\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{3}\gamma)x^4 + (\tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{4}\gamma)x^5 - (\tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{5}\gamma)x^6 + \cdots$$

Wählt man α, β, γ so, dass die Coefficienten von x, x^2 und x^3 verschwinden, so wird

$$l(1+x) = \frac{x(6+x)}{6+4x} + R,$$

$$(3+2x)R = -\left(\frac{1}{3\,.\,4}x^4 - \frac{2}{4\,.\,5}x^5 + \frac{3}{5\,.\,6}x^6 - \cdots\right).$$

Die Summe der eingeklammerten Reihe beträgt weniger als

$$\tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{4}x^5 + \tfrac{1}{4}x^6 + \cdots = \tfrac{1}{4} \cdot \frac{x^4}{1-x}$$

und daher kann für jedes echt gebrochene x

$$R = -\frac{\varrho x^4}{(1-x)(3+2x)}, \quad 0 < \varrho < \tfrac{1}{4}$$

gesetzt werden.

Beschränkt man x auf positive Werthe $< \frac{5}{6}$, so ist in der Reihe

$$\frac{1}{3 \cdot 4} x^4 - \frac{2}{4 \cdot 5} x^5 + \frac{3}{5 \cdot 6} x^6 - \cdots$$

gleich von Anfang her jeder Term grösser als sein Nachfolger, also die Summe der Reihe $< \frac{1}{12} x^4$, und der absolute Werth des Restes R kleiner als

$$\tfrac{1}{12} \cdot \frac{x^4}{3 + 2x} < \tfrac{1}{36} x^4,$$

oder

$$R = -\varrho x^4, \quad 0 < \varrho < \tfrac{1}{36}.$$

So ergiebt sich z. B. für $x = 0{,}3$, wenn für ϱ das eine Mal sein grösster Werth $\frac{1}{36}$, das andere Mal sein kleinster Werth Null gesetzt wird,

$$0{,}262\,275 < l(1{,}3) < 0{,}262\,500,$$

während der wahre Werth ist $l(1{,}3) = 0{,}262\,3643$.

Beispiel 2. Die allgemeinere Voraussetzung

$$l(1 + x) - \frac{x(\alpha + \beta x)}{1 + \gamma x + \delta x^2} = R$$

liefert für α, β, γ, δ die Werthe

$$\alpha = 1, \quad \beta = \tfrac{1}{2}, \quad \gamma = 1, \quad \delta = \tfrac{1}{6},$$

mithin

$$l(1 + x) = \frac{x(6 + 3x)}{6 + 6x + x^2} + R; \quad x^2 < 1.$$

Man findet ferner

$$(6 + 6x + x^2) R = \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 4 \cdot 5} x^5 - \frac{2 \cdot 3}{4 \cdot 5 \cdot 6} x^6 + \frac{3 \cdot 4}{5 \cdot 6 \cdot 7} x^7 - \cdots$$

und hieraus für jedes echt gebrochene x

$$R = \frac{\varrho x^5}{(6 + 6x + x^2)(1 - x)}, \quad 0 < \varrho < \tfrac{1}{5}.$$

Wird dagegen x auf positive Werthe $< \frac{2}{3}$ beschränkt, so ergiebt sich

$$R = \varrho x^5, \quad 0 < \varrho < \tfrac{1}{180}.$$

Im Falle $x = 0{,}3$ ist hiernach

$$0{,}262\,3574 < l(1{,}3) < 0{,}262\,3709.$$

Beispiel 3. Setzt man

$$\tfrac{1}{2}\, l\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right) = \frac{x(15 - 4x^2)}{15 - 9x^2} + R,$$

so findet sich

$$R = \frac{\varrho x^7}{(1 - x)(5 - 3x^2)}, \quad 0 < \varrho < \tfrac{2}{7}.$$

Beispiel 4. Geht man von einer ähnlichen Annahme wie im zweiten Beispiele aus, so erhält man

$$e^x = \frac{6+2x}{6-4x+x^2} + R,$$

$$(6-4x+x^2)R = \frac{x^4}{3.4} + \frac{x^5}{1.4.5} + \frac{x^6}{1.2.6.7} + \frac{x^7}{1.2.3.7.8} + \cdots$$

$$< \frac{x^4}{3.4}\left(1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \cdots\right),$$

mithin

$$R < \frac{x^4 e^x}{12\,[(x-2)^2+2]} < \left(\frac{x^4 e^x}{24} = \varrho x^4 e^x\right),$$

wo ϱ zwischen 0 und $\frac{1}{24}$ liegt. Durch Substitution dieses Werthes ergiebt sich

$$e^x = \frac{6+2x}{6-4x+x^2} \cdot \frac{1}{1-\varrho x^4}, \quad 0 < \varrho < \tfrac{1}{24}.$$

Beispiel 5. Durch ein ähnliches Verfahren wie bei dem vorigen Beispiele erhält man unter der Bedingung $x^2 < 1$

$$(1+x)^\mu = \frac{6+(2\mu+4)x}{6-4(\mu-1)x+\mu(\mu-1)x^2} + R$$

und

$$[6-4(\mu-1)x+\mu(\mu-1)x^2]R = C_4x^4 + C_5x^5 + C_6x^6 + \cdots,$$

worin die Coefficienten C_4, C_5 etc. durch folgende Formel bestimmt sind:

$$C_n = 6(\mu)_n - 4(\mu-1)(\mu)_{n-1} + \mu(\mu-1)(\mu)_{n-2}.$$

Vermöge der Werthe der Binomialcoefficienten findet man weiter

$$C_n = (\mu)_{n-2}\frac{(n-2)(n-3)(\mu+1)(\mu+2)}{(n-1)n}$$

$$= (\mu+2)(\mu+1)\mu(\mu-1)\frac{(\mu-2)_{n-1}}{(n-1)n},$$

mithin

$$[6-4(\mu-1)x+\mu(\mu-1)x^2]R$$

$$= (\mu+2)(\mu+1)\mu(\mu-1)\left\{\frac{(\mu-2)_0}{3.4}x^4 + \frac{(\mu-2)_1}{4.5}x^5 + \frac{(\mu-2)_2}{5.6}x^6 + \cdots\right\}.$$

Die Grenzen, zwischen welche dieser Ausdruck gebracht werden kann, hängen von der Beschaffenheit des Exponenten μ ab. Ist derselbe ein positiver echter Bruch, so wird

$$-[6+4(1-\mu)x-\mu(1-\mu)x^2]R$$

$$=(2+\mu)(1-\mu^2)\mu x^4\left\{\frac{1}{3.4}-\frac{2-\mu}{1}\cdot\frac{x}{4.5}+\frac{(2-\mu)(3-\mu)}{1.2}\cdot\frac{x^2}{5.6}-\cdots\right\};$$

unter der Voraussetzung, dass x zwischen 0 und $\frac{5}{6}$ liegt, beträgt jeder Term der Reihe mehr als sein Nachfolger, daher ist die rechte Seite positiv und kleiner als

$$(2+\mu)(1-\mu^2)\mu x^4\cdot\frac{1}{3.4}<\tfrac{1}{4}x^4.$$

Zufolge dieser Bemerkungen ergiebt sich

$$(1+x)^\mu=\frac{6+(4+2\mu)x-\varrho x^4}{6+4(1-\mu)x-\mu(1-\mu)x^2},\quad 0<\varrho<\tfrac{1}{4},$$

wobei die für μ und x erwähnten Bedingungen fest zu halten sind.

Hiernach ist z. B.

$$\sqrt{1+x}=\frac{6+5x-\varrho x^4}{6+2x-\frac{1}{4}x^2},\quad 0<\varrho<\tfrac{1}{4}.$$

Beispiel 6. Mittelst der bisherigen Methode findet man

$$\cos x=\frac{12-5x^2}{12+x^2}+R,$$

$$(12+x^2)R$$

$$=\frac{x^6}{1.2\ldots6}\left\{2.9-\frac{4.11}{7.8}x^2+\frac{6.13}{7.8.9.10}x^4-\frac{8.15}{7\ldots12}x^6+\cdots\right\}$$

und für den Fall, dass $x^2<\frac{252}{11}$ ist,

$$R<\frac{x^6}{1.2\ldots6}\cdot\frac{2.9}{12+x^2}<\frac{x^6}{480}.$$

Innerhalb der Grenzen 0 bis $\frac{3}{2}\pi$ darf also gesetzt werden

$$\cos x=\frac{12-5x^2}{12+x^2}+\varrho x^6,\quad 0<\varrho<\tfrac{1}{480}.$$

Beispiel 7. Behandelt man den Sinus auf gleiche Weise und ersetzt im Zähler von R die Zahl 11 durch die grössere 12, so findet man gleichfalls zwischen den Grenzen 0 und $\frac{3}{2}\pi$

$$\sin x=\frac{x(60-7x^2)}{60+3x^2}+\varrho x^7,\quad 0<\varrho<\tfrac{1}{4200}.$$

Beispiel 8. Unter der Voraussetzung eines positiven, weniger als 0,9 betragenden x ist

$$arc\,tan\,x = \frac{x(15+4x^2)}{15+9x^2} - \varrho x^7, \quad 0 < \varrho < \tfrac{1}{43},$$

oder auch, wenn der Bogen $u < arc\,41^0 59'$ genommen wird,

$$u = \frac{15 - 11\,sin^2 u}{15 - 6\,sin^2 u}\,tan\,u - \varrho\,tan^7 u, \quad 0 < \varrho < \tfrac{1}{43}.$$

Beispiel 9. Nach der bisherigen Methode findet man, echt gebrochene x vorausgesetzt,

$$arc\,sin\,x = \frac{x(60-17x^2)}{60-27x^2} + R,$$

$$(60-27x^2)R$$

$$= \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{c_7 x^7}{5.6.7} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{c_9 x^9}{7.8.9} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} \cdot \frac{c_{11} x^{11}}{9.10.11} + \cdots,$$

worin die mit c_7, c_9 etc. bezeichneten Coefficienten unter der Form

$$c_n = 3(n-5)(11n-16)$$

enthalten sind. Beachtet man, dass $11n - 16 < 11n - 11$ ist, so ergiebt sich

$$\frac{c_n}{(n-2)(n-1)n} < \frac{33(n-5)}{(n-2)n},$$

mithin

$$(60-27x^2)R$$

$$< \tfrac{3}{8} \cdot 33x^7 \left(\frac{2}{5.7} + \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{7.9}x^2 + \frac{5.7}{6.8} \cdot \frac{6}{9.11}x^4 + \cdots\right)$$

$$< \tfrac{99}{4}x^7 \left(\frac{1}{5.7} + \frac{2}{7.9}x^2 + \frac{3}{9.11}x^4 + \cdots\right).$$

Wie leicht zu sehen ist, besteht immer die Ungleichung

$$\frac{m}{(2m+3)(2m+5)} < \tfrac{1}{30}$$

und daher ist

$$(60-27x^2)R < \tfrac{33}{40}x^7(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots),$$

oder

$$R < \tfrac{33}{40} \cdot \frac{x^7}{(60-27x^2)(1-x^2)} < \tfrac{1}{40} \cdot \frac{x^7}{1-x^2}.$$

Damit gelangt man zu dem Endresultate

$$arc\,sin\,x = \frac{x(60-17x^2)}{60-27x^2} + \frac{\varrho x^7}{1-x^2}, \quad 0 < \varrho < \tfrac{1}{40},$$

oder

$$u = \frac{60 \sin u - 17 \sin^3 u}{60 - 27 \sin^2 u} + \frac{\varrho \sin^7 u}{\cos^2 u}, \quad 0 < \varrho < \tfrac{1}{40},$$

wobei u zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ liegen muss.

Beispiel 10. Es soll die Genauigkeit der Näherungsformel

$$arc \sin x = \frac{3x}{2 + \sqrt{1 - x^2}}$$

untersucht werden.

Setzt man

$$arc \sin x - \frac{3x(2 - \sqrt{1 - x^2})}{3 + x^2} = R,$$

so erhält man vermöge der Reihen für $arc \sin x$ und $\sqrt{1 - x^2}$

$$(3 + x^2)R = \frac{1}{2.4} \cdot \frac{1.2}{3.5} x^5 + \frac{1.3}{2.4.6} \cdot \frac{3.4}{5.7} x^7 + \frac{1.3.5}{2.4.6.8} \cdot \frac{5.6}{7.9} x^9 + \cdots$$
$$< \tfrac{1}{8} x^5 (\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} x^2 + \tfrac{1}{2} x^4 + \tfrac{1}{2} x^6 + \cdots),$$

mithin

$$R < \tfrac{1}{16} \cdot \frac{x^5}{(3 + x^2)(1 - x^2)} < \tfrac{1}{48} \cdot \frac{x^5}{1 - x^2}.$$

Demnach ist

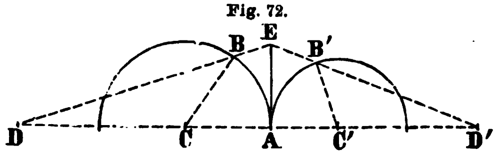
$$arc \sin x = \frac{3x}{2 + \sqrt{1 - x^2}} + \frac{\varrho x^5}{1 - x^2}, \quad 0 < \varrho < \tfrac{1}{48},$$

oder auch, wenn $arc \sin x = u$ gesetzt und u auf den ersten Quadranten beschränkt wird,

$$u = \frac{3 \sin u}{2 + \cos u} + \frac{\varrho \sin^5 u}{\cos^2 u}, \quad 0 < \varrho < \tfrac{1}{48}.$$

Von dieser Formel lässt sich eine Anwendung zur graphischen Rectification von Kreisbögen machen. Ist nämlich (Fig. 72) AB ein gegebener Bogen des mit dem Radius AC beschriebenen Kreises, so nehme man längs AC die Strecke $AD = 3 \,.\, AC$, lege in A eine Tangente an den Kreis und ziehe die Gerade DB, welche die Tangente in E schneidet; für $AC = 1$, $Arc\, aB = u$ ist dann

Fig. 72.



$$AE = \frac{3 \sin u}{2 + \cos u},$$

mithin nahezu $AE = arc\, AB$. So lange der Centriwinkel ACB nicht mehr als 30^0 beträgt, ist der hierbei begangene Fehler weit geringer als die bei Zeichnungen überhaupt unvermeidlichen kleinen Fehler; bei grösseren Centriwinkeln rectificirt man die Hälfte oder sonst einen passenden Theil des Bogens und nimmt von AE das entsprechende Vielfache. Wie die Figur zeigt, kann man dieses Verfahren auch umgekehrt anwenden und mittelst desselben einen gegebenen Kreisbogen auf einen zweiten Kreis übertragen, so dass $arc\,AB' = arc\,AB$ ist.

Beispiel 11. Es soll die Genauigkeit der Gleichung

$$1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 x + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 x^2 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 x^3 + \cdots$$
$$= \tfrac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1-x}}\right) + \tfrac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{2}x}}$$

untersucht werden, wobei x einen positiven echten Bruch bedeutet.

Für die Differenz zwischen der linken und rechten Seite findet man

$$R = -\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{32} - \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\right)x^4$$
$$-\frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{64} - \frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10}\right)x^5$$
$$-\frac{1.3\ldots 11}{2.4\ldots 12}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{128} - \frac{1.3\ldots 11}{2.4\ldots 12}\right)x^6 - \cdots$$

ferner

$$-R < \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\,x^4\left(\frac{9}{32} + \frac{9}{32}x + \frac{9}{32}x^2 + \cdots\right)$$

d. i.

$$-R < \frac{315}{4096}\cdot\frac{x^4}{1-x} < \frac{1}{13}\cdot\frac{x^4}{1-x},$$

wonach gesetzt werden darf

$$R = -\frac{\varrho x^4}{1-x}, \quad 0 < \varrho < \tfrac{1}{13}.$$

Beispiel 12. Es soll die Genauigkeit der Gleichung

$$1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{x}{1} - \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\frac{x^2}{3} - \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\frac{x^3}{5} - \cdots$$
$$= \tfrac{1}{4}\left(1 + \sqrt{1-x}\right) + \tfrac{1}{2}\sqrt{1-\tfrac{1}{2}x}$$

untersucht werden, wobei x einen positiven echten Bruch bedeutet.

Man findet für die Differenz beider Seiten

$$R < \tfrac{45}{4096} \cdot \frac{x^3}{1-x} < \tfrac{1}{91} \cdot \frac{x^3}{1-x},$$

so dass gesetzt werden darf

$$R = \frac{\varrho x^3}{1-x}, \quad 0 < \varrho < \tfrac{1}{91}.$$

In der Lehre von der Rectification der Curven wird sich zeigen, dass die obige Näherungsformel zur approximativen Rectification der Ellipse benutzt werden kann.

§ 43.

Die Auflösung transcendenter Gleichungen.

Die Beispiele des vorigen Paragraphen haben das Gemeinsame, dass eine transcendente Function näherungsweise durch eine algebraische Function ausgedrückt ist; hiervon lässt sich auf folgende Art Gebrauch machen zur Auflösung transcendenter Gleichungen.

Es bedeute $F(x)$ eine aus algebraischen und transcendenten Bestandtheilen zusammengesetzte Function (z. B. $x - \cos x$, $\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ und dergl.) und es sei die Gleichung

$$F(x) = 0$$

aufzulösen; ersetzt man hier die transcendenten Bestandtheile durch die ihnen nach § 42 nahezu gleichgeltenden algebraischen Ausdrücke, so verwandelt sich die gegebene transcendente Gleichung in eine algebraische Gleichung, welche nach den gewöhnlichen Methoden aufgelöst werden kann. Der so erhaltene Werth von x, welcher ξ heissen möge, ist selbstverständlich nur ein Näherungswerth und bedarf in der Regel noch einer kleinen Correction. Um diese zu finden, berechne man zuerst $F(\xi)$, welches nicht genau $= 0$, aber auch nicht viel davon verschieden sein wird; der erhaltene Werth sei ε, also

$$F(\xi) = \varepsilon.$$

Man setze ferner $x = \xi + \delta$, wo δ die Correction bedeutet, und beachte, dass bei kleinen δ nahezu $F(\xi + \delta) = F(\xi) + \delta F'(\xi)$ ist; man hat dann

$$F(\xi) + \delta F'(\xi) = 0,$$

mithin wegen der vorhergehenden Gleichung

$$\delta = -\frac{\varepsilon}{F'(\xi)}.$$

Der hieraus folgende Werth von δ ist nicht absolut genau, mithin $\xi + \delta$ nur ein zweiter Näherungswerth von x; man kann aber diese Verbesserungsmethode beliebig oft anwenden und dadurch dem wahren Werthe des x so nahe kommen, als es der Zweck der Rechnung erheischt.

Beispiel 1. Es soll die Gleichung

$$l(1+x) - \tfrac{3}{4}x = 0$$

aufgelöst werden.

Abgesehen von der Wurzel $x = 0$ giebt es noch eine zweite Wurzel zwischen $\frac{1}{3}$ und 1, wie aus dem Gange der Function $l(1+x) - \frac{3}{4}x$ leicht zu ersehen ist. Wegen des echt gebrochenen x kann man die vorliegende Gleichung durch die folgende ersetzen:

$$\frac{x(6+3x)}{6+6x+x^2} - \tfrac{3}{4}x = 0,$$

welche giebt

$$x = \sqrt{3} - 1 = 0{,}73\,205.$$

Wird dieser Werth mit ξ bezeichnet, so ist

$$\varepsilon = l(\sqrt{3}) - \tfrac{3}{4}(\sqrt{3}-1) = 0{,}549\,306 - 0{,}549\,038 = 0{,}000\,268$$

und hieraus folgt als zweiter Näherungswerth

$$x = 0{,}73\,360,$$

welcher auf fünf Decimalstellen richtig ist.

Beispiel 2. Man verlangt die Wurzel der Gleichung

$$xe^x - 2 = 0.$$

Aus dem Gange der Function $xe^x - 2$ erkennt man, dass die gesuchte Wurzel zwischen 0 und 1 liegt; mittelst der im vorigen Paragraphen entwickelten Näherungsformel für e^x findet man als ersten Näherungswerth $x = \frac{6}{7}$ und als zweiten

$$x = 0{,}8526.$$

Beispiel 3. Es soll die Gleichung

$$x - \cos x = 0$$

aufgelöst werden.

Da der gesuchte Werth zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ liegen muss, so lässt sich die im vorigen Paragraphen für $\cos x$ entwickelte Näherungsformel anwenden. Man erhält zunächst die cubische Gleichung

$$x^3 + 5x^2 + 12x - 12 = 0,$$

hieraus als ersten Näherungswerth $x = 0{,}739 = arc\,42^0 21'$ und nachher durch Verbesserung

$$x = arc\,42^0 20' 47'' 3.$$

Beispiel 4. Für die Wurzel der transcendenten Gleichung

$$1 - (1 + x^2) \cos x = 0$$

findet man als ersten Näherungswerth

$$x = \sqrt{\tfrac{6}{5}} = arc\,62^0 46'$$

und durch Verbesserung

$$x = 1{,}102\,506 = arc\,63^0 10' 8'' 2.$$

Es ist dieser Werth nicht der einzige, welcher die gegebene Gleichung befriedigt. Die Wurzeln desselben lassen sich nämlich als die Abscissen der Punkte betrachten, in denen sich die beiden Curven

$$y = \cos x \text{ und } y = \frac{1}{1 + x^2}$$

schneiden, und hieraus folgt durch blosse Anschauung der Curven, dass unendlich viele positive und negative Wurzeln vorhanden sind. Die positiven Wurzeln x_0, x_1, x_2 etc. liegen folgendermassen

$$\begin{array}{ll} x_0 = 0, & 0 < x_1 < \tfrac{1}{2}\pi, \\ \tfrac{3}{2}\pi < x_2 < 2\pi, & 2\pi < x_3 < \tfrac{5}{2}\pi, \\ \tfrac{7}{2}\pi < x_4 < 4\pi, & 4\pi < x_5 < \tfrac{9}{2}\pi, \\ \ldots & \ldots \end{array}$$

Die negativen Wurzeln haben dieselben Werthe, aber das entgegengesetzte Vorzeichen. Ferner übersieht man leicht, dass die Differenzen

$$x_2 - \tfrac{3}{2}\pi,\ x_3 - \tfrac{5}{2}\pi,\ x_4 - \tfrac{7}{2}\pi,\ x_5 - \tfrac{9}{2}\pi, \ldots$$

welche alternirende Vorzeichen besitzen, rasch abnehmen, dass folglich $x_{n+1} - x_n$ gegen die Grenze 0 convergirt.

Um x_2 zu finden, setze man $x_2 = \frac{3}{2}\pi + \xi$, wodurch

$$\sin \xi = \frac{1}{1 + (\frac{3}{2}\pi + \xi)^2}$$

wird; man hat dann wegen der Kleinigkeit von ξ näherungsweise

$$\xi = \frac{1}{1 + (\frac{3}{2}\pi)^2}, \text{ mithin } x_2 = \tfrac{3}{2}\pi + \frac{1}{1 + (\frac{3}{2}\pi)^2},$$

und durch weitere Correction

$$x_2 = 4{,}754\,761 = arc\,272^0 25' 39'' 8.$$

Auf gleiche Weise findet sich

$$x_3 = 7{,}837\,964 = arc\,449^0\ 4'56''1,$$
$$x_4 = 11{,}003\,766 = arc\,630^0 28'\ 9''6,$$
$$x_5 = 14{,}132\,185 = arc\,809^0 42' 52'' 4,$$
$$x_6 = 17{,}282\,097 = arc\,990^0 11' 28'' 3,$$

u. s. w.

Beispiel 5. Um die kleinste positive Wurzel der Gleichung

$$u - cot\,u = 0$$

zu finden, benutze man für u die im 10. Beispiel des vorigen Paragraphen entwickelte Formel; als ersten Näherungswerth erhält man

$$cos\,u = \frac{\sqrt{13} - 1}{4} \text{ oder } u = arc\,49^0 21'$$

und durch Verbesserung

$$u = arc\,49^0 17' 36'' 5.$$

Die obige transcendente Gleichung besitzt übrigens noch unendlich viele andere Wurzeln.

Capitel XII.

Functionen und Reihen mit complexen Variabelen.

§ 44.

Die einfachen Functionen complexer Variabelen.

1. Bezeichnet i die imaginäre Einheit $\sqrt{-1}$, so ist $x + iy$ die allgemeine Form einer complexen Variabelen; $x^2 + y^2$ heisst die Norm dieser Variabelen, $\sqrt{x^2 + y^2}$ ihr Modulus, wobei die Wurzel jederzeit im absoluten Sinne genommen wird.

Setzt man ferner

$$tan\,\theta = \frac{y}{x} \quad \text{oder} \quad \theta = arc\,tan\frac{y}{x} \pm k\pi,$$

wo k irgend eine ganze Zahl bedeutet, so lässt sich die complexe Variabele immer auf die Form

$$x + iy = r\,(cos\,\theta + i\,sin\,\theta)$$

bringen; θ heisst dann die Amplitude der Variabelen.

2. Addition, Subtraction, Multiplication und Division complexer Variabelen werden ebenso ausgeführt, wie bei reellen Variabelen, nur hat man dabei auf die Gleichungen $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = +1$, $i^5 = +i$ u. s. w. Rücksicht zu nehmen. Falls die complexen Variabelen durch Modulus und Amplitude ausgedrückt sind, können Multiplicationen und Divisionen mittelst der Formeln

$$r_1\,(cos\,\theta_1 + i\,sin\,\theta_1)\,.\,r_2\,(cos\,\theta_2 + i\,sin\,\theta_2)$$
$$= r_1 r_2\,[cos\,(\theta_1 + \theta_2) + i\,sin\,(\theta_1 + \theta_2)]$$

$$\frac{r_1\,(cos\,\theta_1 + i\,sin\,\theta_1)}{r_2\,(cos\,\theta_2 + i\,sin\,\theta_2)} = \frac{r_1}{r_2}\,[cos\,(\theta_1 - \theta_2) + i\,sin\,(\theta_1 - \theta_2)]$$

ausgeführt werden.

3. Um eine complexe Zahl auf einen reellen ganzen positiven Exponenten zu erheben, drückt man die Basis durch Modulus und Amplitude aus und hat

$$(x + iy)^m = [r\,(cos\,\theta + i\,sin\,\theta)]^m = r^m\,(cos\,m\,\theta + i\,sin\,m\,\theta).$$

Ist der Exponent ein positiver, auf seine kürzeste Benennung gebrachter Bruch $\frac{m}{n}$, so hat die Potenz n verschiedene Werthe, welche aus der Gleichung

$$[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^{\frac{m}{n}} = r^{\frac{m}{n}}\left\{\cos\frac{m\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{m\theta+2k\pi}{n}\right\}$$

für $k = 0, 1, 2, 3, \ldots (n-1)$ hervorgehen. Dabei ist $r^{\frac{m}{n}}$ im absoluten Sinne zu nehmen.

Potenzen mit negativen Exponenten werden mittelst der Definition

$$z^{-\mu} = \frac{1}{z^{\mu}}$$

auf Potenzen mit positiven Exponenten zurückgeführt.

Nach dem Vorhergehenden sind die n Wurzeln der Gleichung

$$z^n = +1$$

bei geraden n folgende:

$$\begin{array}{ll}
+1, & -1, \\
\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}, & \cos\frac{2\pi}{n} - i\sin\frac{2\pi}{n}, \\
\cos\frac{4\pi}{n} + i\sin\frac{4\pi}{n}, & \cos\frac{4\pi}{n} - i\sin\frac{4\pi}{n}, \\
\cos\frac{6\pi}{n} + i\sin\frac{6\pi}{n}, & \cos\frac{6\pi}{n} - i\sin\frac{6\pi}{n}, \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots \\
\cos\frac{(n-2)\pi}{n} + i\sin\frac{(n-2)\pi}{n}, & \cos\frac{(n-2)\pi}{n} - i\sin\frac{(n-2)\pi}{n},
\end{array}$$

bei ungeraden n sind sie:

$$\begin{array}{ll}
\multicolumn{2}{c}{+1,} \\
\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}, & \cos\frac{2\pi}{n} - i\sin\frac{2\pi}{n}, \\
\cos\frac{4\pi}{n} + i\sin\frac{4\pi}{n}, & \cos\frac{4\pi}{n} - i\sin\frac{4\pi}{n}, \\
\cos\frac{6\pi}{n} + i\sin\frac{6\pi}{n}, & \cos\frac{6\pi}{n} - i\sin\frac{6\pi}{n}, \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots \\
\cos\frac{(n-1)\pi}{n} + i\sin\frac{(n-1)\pi}{n}, & \cos\frac{(n-1)\pi}{n} - i\sin\frac{(n-1)\pi}{n}.
\end{array}$$

Ferner hat die Gleichung

$$z^n = -1$$

bei geraden n folgende Wurzeln:

$$\cos\frac{\pi}{n} + i\sin\frac{\pi}{n}, \qquad \cos\frac{\pi}{n} - i\sin\frac{\pi}{n},$$

$$\cos\frac{3\pi}{n} + i\sin\frac{3\pi}{n}, \qquad \cos\frac{3\pi}{n} - i\sin\frac{3\pi}{n},$$

$$\cos\frac{5\pi}{n} + i\sin\frac{5\pi}{n}, \qquad \cos\frac{5\pi}{n} - i\sin\frac{5\pi}{n},$$

$$\cdots\cdots\cdots\qquad\cdots\cdots\cdots$$

$$\cos\frac{(n-1)\pi}{n} + i\sin\frac{(n-1)\pi}{n}, \quad \cos\frac{(n-1)\pi}{n} - i\sin\frac{(n-1)\pi}{n},$$

dagegen bei ungeraden n:

$$-1,$$

$$\cos\frac{\pi}{n} + i\sin\frac{\pi}{n}, \quad \cos\frac{\pi}{n} - i\sin\frac{\pi}{n},$$

$$\cos\frac{3\pi}{n} + i\sin\frac{3\pi}{n}, \quad \cos\frac{3\pi}{n} - i\sin\frac{3\pi}{n},$$

$$\cos\frac{5\pi}{n} + i\sin\frac{5\pi}{n}, \quad \cos\frac{5\pi}{n} - i\sin\frac{5\pi}{n},$$

$$\cdots\cdots\cdots\qquad\cdots\cdots\cdots$$

$$\cos\frac{(n-2)\pi}{n} + i\sin\frac{(n-2)\pi}{n}, \quad \cos\frac{(n-2)\pi}{n} - i\sin\frac{(n-2)\pi}{n}.$$

Bei complexen z_1 und z_2 gilt der Satz

$$z_1^{\mu} \,.\, z_2^{\mu} = (z_1 z_2)^{\mu}$$

ohne Einschränkung, wenn μ eine positive oder negative ganze Zahl ist; bei gebrochenen μ bleibt er insofern richtig, als jeder Werth von z_1^{μ}, multiplicirt mit irgend einem Werthe von z_2^{μ}, wieder einen der Werthe von $(z_1 z_2)^{\mu}$ giebt.

4. Die Exponentialgrösse e^{x+iy} wird durch die Gleichung

$$e^{x+iy} = Lim\left\{\left(1 + \frac{x+iy}{m}\right)^m\right\}$$

definirt, worin m eine unendlich wachsende ganze positive Zahl bedeutet; die Ausführung des angedeuteten Grenzenüberganges liefert

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y).$$

Hieran knüpfen sich die speciellen Gleichungen

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y, \quad e^{-iy} = \cos y - i \sin y,$$

$$\frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} = \cos y, \quad \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} = \sin y.$$

Allgemeiner ist bei reellen positiven a

$$a^{x+iy} = a^x \{\cos (y l a) + i \sin (y l a)\}.$$

Die Gleichung

$$a^{z_1} . a^{z_2} = a^{z_1 + z_2}$$

gilt für alle complexen z_1 und z_2.

5. Bezeichnet $L\zeta$ den allgemeinen Logarithmus von ζ, d. h. irgend eine reelle oder complexe Zahl z, welcher die Eigenschaft $e^z = \zeta$ zukommt, so ist bei positiven ξ

$$L(\xi + i\eta) = \tfrac{1}{2} l (\xi^2 + \eta^2) + i \left\{ \operatorname{arc\,tan} \frac{\eta}{\xi} \pm 2k\pi \right\},$$

worin k irgend eine ganze Zahl bedeutet; bei negativen ξ ist

$$L(\xi + i\eta) = \tfrac{1}{2} l (\xi^2 + \eta^2) + i \left\{ \operatorname{arc\,tan} \frac{\eta}{\xi} \pm (2k+1)\pi \right\}.$$

Specielle Fälle hiervon sind

$$L(+1) = \pm 2k\pi i, \quad L(-1) = \pm (2k+1)\pi i.$$

Die Gleichung

$$L(\zeta_1 \zeta_2) = L\zeta_1 + L\zeta_2$$

gilt allgemein, wenn die Vieldeutigkeit von $L\zeta$ beachtet wird (ähnlich wie am Ende von Nr. 3).

Eine häufig angewendete Formel ist noch

$$\frac{1}{2i} L\left(\frac{\xi + i\eta}{\xi - i\eta}\right) = \operatorname{arc\,tan} \frac{\eta}{\xi} \pm 2h\pi,$$

wo h eine beliebige ganze Zahl bedeutet.

6. Die in Nr. 4 für $\cos y$ und $\sin y$ angegebenen Formeln dienen als Definitionen des Cosinus und Sinus einer beliebigen complexen Variabelen; sie geben

$$\cos (x + iy) = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \cos x - i \frac{e^y - e^{-y}}{2} \sin x,$$

$$\sin (x + iy) = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \sin x + i \frac{e^y - e^{-y}}{2} \cos x,$$

und specieller

$$\cos (iy) = \frac{e^y + e^{-y}}{2}, \quad \sin (iy) = i \frac{e^y - e^{-y}}{2}.$$

Die beiden Functionen

$$\frac{e^y + e^{-y}}{2} \text{ und } \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

nennt man den **hyperbolischen Cosinus** resp. den **hyperbolischen Sinus** und bezeichnet sie entweder mit $\mathfrak{Cos}\, y$ und $\mathfrak{Sin}\, y$ oder zweckmässiger durch $cshp\, y$ und $snhp\, y$. Demnach ist

$$\cos(iy) = cshp\, y, \quad \sin(iy) = i\, snhp\, y$$

und

$$\cos(x + iy) = \cos x\, cshp\, y - i \sin x\, snhp\, y,$$

$$\sin(x + iy) = \sin x\, cshp\, y + i \cos x\, snhp\, y.$$

7. Für die übrigen goniometrischen Functionen benutzt man die gewöhnlichen Definitionen

$$\sec z = \frac{1}{\cos z}, \quad \tan z = \frac{\sin z}{\cos z} \text{ u. s. w.}$$

und erhält

$$\sec(x + iy) = 2\,\frac{(e^y + e^{-y})\cos x + i(e^y - e^{-y})\sin x}{e^{2y} + e^{-2y} + 2\cos 2x},$$

$$= 2\,\frac{\cos x\, cshp\, y + i \sin x\, snhp\, y}{\cos 2x + cshp\, 2y},$$

$$\tan(x + iy) = \frac{2\sin 2x + i(e^{2y} - e^{-2y})}{e^{2y} + e^{-2y} + 2\cos 2x},$$

$$= \frac{\sin 2x + i\, snhp\, 2y}{\cos 2x + cshp\, 2y},$$

$$\csc(x + iy) = 2\,\frac{(e^y + e^{-y})\sin x - i(e^y - e^{-y})\cos x}{e^{2y} + e^{-2y} - 2\cos 2x},$$

$$= -2\,\frac{\sin x\, cshp\, y - i\cos x\, snhp\, y}{\cos 2x - cshp\, 2y},$$

$$\cot(x + iy) = \frac{2\sin 2x - i(e^{2y} - e^{-2y})}{e^{2y} + e^{-2y} - 2\cos 2x},$$

$$= -\frac{\sin 2x - i\, snhp\, 2y}{\cos 2x - cshp\, 2y}.$$

Die goniometrischen Formeln für $\sin(z_1 + z_2)$, $\cos(z_1 + z_2)$ u. s. w. gelten ebenso bei complexen wie bei reellen z_1 und z_2.

8. Unter $Arc \sin \xi$ versteht man jede reelle oder complexe Zahl z, welche der Gleichung $\sin z = \zeta$ genügt; wird zur Abkürzung gesetzt

$$S = \tfrac{1}{2}\left\{\sqrt{(1+\xi)^2+\eta^2}+\sqrt{(1-\xi)^2+\eta^2}\right\},$$
$$T = \tfrac{1}{2}\left\{\sqrt{(1+\xi)^2+\eta^2}-\sqrt{(1-\xi)^2+\eta^2}\right\},$$

wobei alle Wurzeln im absoluten Sinne genommen werden müssen, und bezeichnet man ferner mit n eine beliebige positive oder negative ganze Zahl, so sind alle Werthe von $Arc\sin(\xi+i\eta)$ in folgenden zwei Formeln enthalten:

$$Arc\sin(\xi+i\eta) = 2n\pi + arc\sin T + i\,.\,l(S+\sqrt{S^2-1}),$$
$$Arc\sin(\xi+i\eta) = (2n+1)\pi - arc\sin T - i\,.\,l(S+\sqrt{S^2-1}).$$

Der kleinste dieser Werthe möge mit $arc\sin(\xi+i\eta)$ bezeichnet werden, nämlich

$$arc\sin(\xi+i\eta) = arc\sin T + i\,.\,l(S+\sqrt{S^2-1});$$

die bekannten Formeln

$$Arc\sin\zeta = 2n\pi + arc\sin\zeta,$$
$$Arc\sin\zeta = (2n+1)\pi - arc\sin\zeta$$

gelten dann gleichmässig für reelle und complexe ζ.

Für $\eta = 0$, $\xi^2 > 1$ wird $S = \xi$, $T = 1$ daher

$$arc\sin\xi = \tfrac{1}{2}\pi + i\,.\,l(\xi+\sqrt{\xi^2-1}), \quad \xi^2 > 1;$$

für $\xi = 0$ und beliebige η wird $S = \sqrt{1+\eta^2}$, $T = 0$, mithin

$$arc\sin(i\eta) = i\,.\,l(\sqrt{1+\eta^2}+\eta).$$

Versteht man unter $Arc\cos\zeta$ jedes der Gleichung $\cos z = \zeta$ genügende z, so kann man alle Werthe von $Arc\cos(\xi+i\eta)$ durch folgende zwei Gleichungen darstellen:

$$Arc\cos(\xi+i\eta) = 2n\pi + arc\cos T - i\,.\,l(S+\sqrt{S^2-1}),$$
$$Arc\cos(\xi+i\eta) = 2n\pi - arc\cos T + i\,.\,l(S+\sqrt{S^2-1}),$$

worin n, S und T dieselbe Bedeutung haben wie vorhin.

Definirt man $arc\cos(\xi+i\eta)$ durch die Formel

$$arc\cos(\xi+i\eta) = arc\cos T - i\,.\,l(S+\sqrt{S^2-1}),$$

so gilt die Relation

$$Arc\cos\zeta = 2n\pi \pm arc\cos\zeta$$

gleichmässig für reelle und complexe ζ. Ebenso bleibt die Formel

$$arc\sin\zeta + arc\cos\zeta = \tfrac{1}{2}\pi$$

für reelle und complexe ζ richtig.

9. Jedes der Gleichung $\tan z = \zeta$ genügende z werde mit $Arc\tan\zeta$ bezeichnet; sämmtliche Werthe von $Arc\tan(\xi+i\eta)$ sind dann in folgenden zwei Formeln enthalten:

$$Arc\,tan(\xi + i\eta) = n\pi + \tfrac{1}{2}\,arc\,tan\frac{2\xi}{1-(\xi^2+\eta^2)}$$

$$+\frac{i}{4}\,l\left[\frac{\xi^2+(1+\eta)^2}{\xi^2+(1-\eta)^2}\right],\quad \xi^2+\eta^2<1,$$

$$Arc\,tan(\xi + i\eta) = n\pi + \tfrac{1}{2}\left\{\pi - arc\,tan\frac{2\xi}{\xi^2+\eta^2-1}\right\}$$

$$+\frac{i}{4}\,l\left[\frac{\xi^2+(1+\eta)^2}{\xi^2+(1-\eta)^2}\right],\quad \xi^2+\eta^2>1,$$

worin n eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bedeutet.

Die für $n=0$ entstehenden Werthe mögen $arc\,tan(\xi+i\eta)$ heissen, nämlich

$$arc\,tan(\xi + i\eta) = \tfrac{1}{2}\,arc\,tan\frac{2\xi}{1-(\xi^2+\eta^2)} + \frac{i}{4}\,l\left[\frac{\xi^2+(1+\eta)^2}{\xi^2+(1-\eta)^2}\right],$$
$$\xi^2+\eta^2<1,$$

$$arc\,tan(\xi + i\eta) = \tfrac{1}{2}\left\{\pi - arc\,tan\frac{2\xi}{\xi^2+\eta^2-1}\right\} + \frac{i}{4}\,l\left[\frac{\xi^2+(1+\eta)^2}{\xi^2+(1-\eta)^2}\right],$$
$$\xi^2+\eta^2>1;$$

die Formel

$$Arc\,tan\,\zeta = n\pi + arc\,tan\,\zeta$$

gilt dann gleichmässig für reelle und complexe ζ.

Für $\xi = 0$ folgt

$$arc\,tan(i\eta) = \frac{i}{4}\,l\left[\left(\frac{1+\eta}{1-\eta}\right)^2\right],\quad \eta^2<1,$$

$$arc\,tan(i\eta) = \frac{\pi}{2} + \frac{i}{4}\,l\left[\left(\frac{\eta+1}{\eta-1}\right)^2\right],\quad \eta^2>1;$$

die Function $arc\,tan(i\eta)$ ändert sich demnach sprungweise an den Stellen $\eta = \pm 1$.

Versteht man unter $Arc\,cot\,\zeta$ jedes z, welches die Eigenschaft $cot\,z = \zeta$ besitzt, so bestimmen sich die Werthe von $Arc\,cot(\xi+i\eta)$ durch folgende zwei Formeln:

$$Arc\,cot(\xi + i\eta) = n\pi + \tfrac{1}{2}\left\{\pi - arc\,cot\frac{1-(\xi^2+\eta^2)}{2\xi}\right\}$$

$$-\frac{i}{4}\,l\left[\frac{\xi^2+(1+\eta)^2}{\xi^2+(1-\eta)^2}\right],\quad \xi^2+\eta^2<1,$$

$$Arc\,cot(\xi + i\eta) = n\pi + \tfrac{1}{2}\,arc\,cot\frac{\xi^2+\eta^2-1}{2\xi}$$

$$-\frac{i}{4}\,l\left[\frac{\xi^2+(1+\eta)^2}{\xi^2+(1-\eta)^2}\right],\quad \xi^2+\eta^2>1,$$

worin n eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bedeutet.

Dem Werthe $n=0$ entsprechen die speciellen Functionswerthe

$$arc\,cot(\xi+i\eta)=\tfrac{1}{2}\left\{\pi-arc\,cot\frac{1-(\xi^2+\eta^2)}{2\xi}\right\}-\frac{i}{4}\,l\left[\frac{\xi^2+(1+\eta)^2}{\xi^2+(1-\eta)^2}\right],$$

$$\xi^2+\eta^2<1,$$

$$arc\,cot(\xi+i\eta)=\tfrac{1}{2}\,arc\,cot\frac{\xi^2+\eta^2-1}{2\xi}-\frac{i}{4}\,l\left[\frac{\xi^2+(1+\eta)^2}{\xi^2+(1-\eta)^2}\right],$$

$$\xi^2+\eta^2>1;$$

es ist daher allgemein für reelle und complexe ζ

$$Arc\,cot\,\zeta=n\pi+arc\,cot\,\zeta$$

und ebenso, je nachdem ζ positiv oder negativ ist,

$$arc\,tan\,\zeta+arc\,cot\,\zeta=\pm\tfrac{1}{2}\pi.$$

Auch von der Function $arc\,cot(i\eta)$ gilt die Bemerkung, dass sie an den Stellen $\eta=\pm 1$ Unterbrechungen der Continuität erleidet.

§ 45.

Reihen mit complexen Variabelen.

Eine unendliche Reihe, deren Terme complexe Zahlen sind, heisst convergent, wenn sowohl die reellen als die imaginären Bestandtheile aller Terme, für sich genommen, convergirende Reihen geben; in jedem anderen Falle heisst die Reihe divergent. Zur Convergenz der Reihe

$$(u_0+iv_0)+(u_1+iv_1)+(u_2+iv_2)+\cdots$$

gehören also die beiden Bedingungen, dass die zwei Reihen

$$u_0+u_1+u_2+u_3+\cdots,$$
$$v_0+v_1+v_2+v_3+\cdots,$$

gleichzeitig convergiren. Sind U und V die Summen der letzteren Reihen, so nennt man $U+iV$ die Summe der obigen complexen Reihe.

Beispiel 1. Es soll die Reihe

$$\tfrac{1}{1}z+\tfrac{1}{2}z^2+\tfrac{1}{3}z^3+\tfrac{1}{4}z^4+\cdots$$

für den Fall eines complexen z, nämlich

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

summirt werden.

Die beiden Reihen sind hier

$$\tfrac{1}{1}r\cos\theta+\tfrac{1}{2}r^2\cos 2\theta+\tfrac{1}{3}r^3\cos 3\theta+\cdots,$$
$$\tfrac{1}{1}r\sin\theta+\tfrac{1}{2}r^2\sin 2\theta+\tfrac{1}{3}r^3\sin 3\theta+\cdots,$$

dieselben convergiren unbedingt, wenn schon die Reihe

$$\frac{1}{1}r + \frac{1}{2}r^2 + \frac{1}{3}r^3 + \frac{1}{4}r^4 + \cdots$$

convergirt, d. h. wenn $r^2 < 1$ ist; auch sind dann ihre Summen stetige Functionen von r. Nennen wir sie U und V, so erhalten wir durch Differentiation

$$\frac{dU}{dr} = \cos\theta + r\cos 2\theta + r^2\cos 3\theta + \cdots,$$

d. i. nach den Formeln in § 35, Nr. 14

$$\frac{dU}{dr} = \frac{\cos\theta - r}{1 - 2r\cos\theta + r^2},$$

wofür geschrieben werden kann

$$\frac{dU}{dr} = \frac{d[-\frac{1}{2}l(1 - 2r\cos\theta + r^2)]}{dr}.$$

Zufolge des in § 37 unter *d*) erwähnten Satzes folgt nun

$$U = -\frac{1}{2}l(1 - 2r\cos\theta + r^2) + Const,$$

und wenn man beachtet, dass die mit U bezeichnete Reihe für $r = 0$ verschwindet, so erhält man $Const = 0$, mithin

$$-\frac{1}{2}l(1 - 2r\cos\theta + r^2) = \frac{1}{1}r\cos\theta + \frac{1}{2}r^2\cos 2\theta + \frac{1}{3}r^3\cos 3\theta + \cdots$$
$$r^2 < 1.$$

Mittelst desselben Verfahrens findet sich

$$arc\tan\frac{r\sin\theta}{1 - r\cos\theta} = \frac{1}{1}r\sin\theta + \frac{1}{2}r^2\sin 2\theta + \frac{1}{3}r^3\sin 3\theta + \cdots$$
$$r^2 < 1.$$

Setzt man wieder $r(\cos\theta + i\sin\theta) = z$ und beachtet die Relation

$$-\frac{1}{2}l(1 - 2r\cos\theta + r^2) + i\,arc\tan\frac{r\sin\theta}{1 - r\cos\theta}$$
$$= -l[1 - r(\cos\theta + i\sin\theta)] = l\left(\frac{1}{1-z}\right),$$

so gelangt man mittelst der obigen Gleichung zu dem Resultate, dass die Reihenentwickelung

$$l\left(\frac{1}{1-z}\right) = \frac{1}{1}z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 + \cdots$$

auch für solche complexe z gilt, deren Modulus weniger als die Einheit beträgt.

Beispiel 2. Es soll die Reihe

$$1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \cdots$$

für den Fall $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ summirt werden.

Die obige Reihe convergirt für jedes r und θ und zerfällt in

$$U = 1 + \frac{r\cos\theta}{1} + \frac{r^2\cos 2\theta}{1.2} + \frac{r^3\cos 3\theta}{1.2.3} + \cdots,$$

$$V = \frac{r\sin\theta}{1} + \frac{r^2\sin 2\theta}{1.2} + \frac{r^3\sin 3\theta}{1.2.3} + \cdots$$

Man bemerke nun, dass folgende Gleichungen gelten

$$\frac{dU}{dr} = U\cos\theta - V\sin\theta, \quad \frac{dV}{dr} = U\sin\theta + V\cos\theta,$$

aus welchen sich die Relationen ergeben

$$U\frac{dU}{dr} + V\frac{dV}{dr} = (U^2 + V^2)\cos\theta,$$

$$U\frac{dV}{dr} - V\frac{dU}{dr} = (U^2 + V^2)\sin\theta.$$

Diese können einfacher dargestellt werden, wenn man setzt

$$U + iV = P(\cos\Omega + i\sin\Omega),$$

mithin

$$U^2 + V^2 = P^2, \quad arc\tan\frac{V}{U} + k\pi = \Omega;$$

es ist dann

$$U\frac{dV}{dr} + V\frac{dV}{dr} = P\frac{dP}{dr},$$

$$U\frac{dU}{dr} - V\frac{dU}{dr} = (U^2 + V^2)\frac{d\Omega}{dr},$$

und in Folge dieser Beziehungen gestalten sich die vorhergehenden Gleichungen wie folgt

$$\frac{dP}{dr} = P\cos\theta \quad \text{oder} \quad \frac{dlP}{dr} = \frac{d(r\cos\theta)}{dr},$$

$$\frac{d\Omega}{dr} = \sin\theta \quad \text{,,} \quad \frac{d\Omega}{dr} = \frac{d(r\sin\theta)}{dr}.$$

Hieraus ergeben sich die Werthe

$$P = e^{r\cos\theta + a}, \quad \Omega = r\sin\theta + b,$$

wo a und b Constanten bedeuten. Diese bestimmen sich durch die Specialisirung $r = 0$ und das Endresultat besteht aus folgenden zwei Gleichungen

$$e^{r\cos\theta}\cos(r\sin\theta) = 1 + \frac{r\cos\theta}{1} + \frac{r^2\cos 2\theta}{1.2} + \frac{r^3\cos 3\theta}{1.2.3} + \cdots,$$

$$e^{r\cos\theta}\sin(r\sin\theta) = \frac{r\sin\theta}{1} + \frac{r^2\sin 2\theta}{1.2} + \frac{r^3\sin 3\theta}{1.2.3} + \cdots$$

Multiplicirt man die zweite Gleichung mit i und addirt sie zur ersten, so findet man, dass die Gleichung

$$e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^2}{1.2.3} + \cdots$$

füs jedes complexe z giltig ist.

Beispiel 3. Es soll die Reihe

$$1 + \frac{\mu}{1} z + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2} z^2 + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3} z^3 + \cdots$$

für $z = r(\cos\theta + i \sin\theta)$ summirt werden.

Bezeichnet man die Binomialcoefficienten auf die gewöhnliche kurze Weise, so handelt es sich um die Summirung der beiden Reihen

$$1 + (\mu)_1 r \cos\theta + (\mu)_2 r^2 \cos 2\theta + (\mu)_3 r^3 \cos 3\theta + \cdots,$$
$$(\mu)_1 r \sin\theta + (\mu)_2 r^2 \sin 2\theta + (\mu)_3 r^3 \sin 3\theta + \cdots,$$

welche bei ganzen positiven μ für jedes r, ausserdem aber nur für $r^2 < 1$ convergiren und deren Summen in jedem Falle U und V heissen mögen. Man bemerke nun, dass folgende Gleichungen stattfinden

$$\frac{dU}{dr}(1 + r\cos\theta) - \frac{dV}{dr} r \sin\theta = \mu(U\cos\theta - V\sin\theta),$$

$$\frac{dV}{dr}(1 + r\cos\theta) + \frac{dU}{dr} r \sin\theta = \mu(V\cos\theta + U\sin\theta);$$

eliminirt man hieraus das eine Mal $\frac{dV}{dr}$, das andere Mal $\frac{dU}{dr}$, so gelangt man zu den weiteren Relationen

$$(1 + 2r\cos\theta + r^2)\frac{dU}{dr} = \mu\{U(r + \cos\theta) - V\sin\theta\},$$

$$(1 + 2r\cos\theta + r^2)\frac{dV}{dr} = \mu\{U\sin\theta + V(r + \cos\theta)\},$$

$$U\frac{dU}{dr} + V\frac{dV}{dr} = \frac{\mu(r + \cos\theta)}{1 + 2r\cos\theta + r^2}(U^2 + V^2),$$

$$U\frac{dV}{dr} - V\frac{dU}{dr} = \frac{\mu \sin\theta}{1 + 2r\cos\theta + r^2}(U^2 + V^2).$$

Diese vereinfachen sich für

$$U + iV = P(\cos\Omega + i\sin\Omega)$$

und gehen über in

$$\frac{dP}{dr} = \frac{\mu(r + \cos\theta)P}{1 + 2r\cos\theta + r^2}, \quad \frac{d\Omega}{dr} = \frac{\mu \sin\theta}{1 + 2r\cos\theta + r^2},$$

wofür geschrieben werden kann

$$\frac{dlP}{dr} = \frac{d[\frac{1}{2}\mu l(1 + 2r\cos\theta + r^2)]}{dr}, \quad \frac{d\Omega}{dr} = \frac{d\left[\mu \arctan\left(\frac{r\sin\theta}{1 + r\cos\theta}\right)\right]}{dr}.$$

Hieraus findet man P und Ω, wobei die auftretenden Constanten mittelst der Specialisirung $r = 0$ zu bestimmen sind; die Resultate gestalten sich dann wie folgt:

$$(1 + 2r\cos\theta + r^2)^{\frac{1}{2}\mu} \cos\left(\mu \arctan\frac{r\sin\theta}{1 + r\cos\theta}\right)$$

$$= 1 + (\mu)_1 r\cos\theta + (\mu)_2 r^2 \cos 2\theta + (\mu)_3 r^3 \cos 3\theta + \cdots,$$

$$(1 + 2r\cos\theta + r^2)^{\frac{1}{2}\mu} \sin\left(\mu \arctan\frac{r\sin\theta}{1 + r\cos\theta}\right)$$

$$= (\mu)_1 r\sin\theta + (\mu)_2 r^2 \sin 2\theta + (\mu)_3 r^3 \sin 3\theta + \cdots,$$

wobei $r^2 < 1$ sein muss, falls μ keine ganze positive Zahl ist.

Multiplicirt man die zweite Gleichung mit i und addirt sie zur ersten, so findet man, dass der allgemeine binomische Satz auch für solche complexe z gilt, deren Modulus unter der Einheit liegt.

§ 46.

Reihen mit übersprungenen Termen.

Aus der bekannten Summenformel

$$1 + \cos\beta + \cos 2\beta + \cos 3\beta + \cdots + \cos(m-1)\beta$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(m - \frac{1}{2})\beta}{\sin\frac{1}{2}\beta} = \frac{1}{2}(1 - \cos m\beta) + \frac{1}{2}\frac{\sin m\beta}{\sin\frac{1}{2}\beta}\cos\frac{1}{2}\beta$$

erhält man für $\beta = \frac{2k\pi}{m}$, wo k eine ganze positive Zahl bedeuten möge,

$$1 + \cos\frac{2k\pi}{m} + \cos\frac{4k\pi}{m} + \cos\frac{6k\pi}{m} + \cdots + \cos\frac{(2m-2)k\pi}{m}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin 2k\pi}{\sin\frac{k\pi}{m}} \cos\frac{k\pi}{m}.$$

Wenn $\frac{k}{m}$ keine ganze Zahl ist, so verschwindet der Ausdruck rechter Hand, wenn dagegen m in k aufgeht, mithin $\frac{k}{m}$ einer ganzen Zahl q gleich ist, so wird

$$\frac{\sin 2k\pi}{\sin\frac{k\pi}{m}} = \frac{\sin 2mq\pi}{\sin q\pi} = \frac{0}{0},$$

und durch Untersuchung des Bruches

$$\frac{\sin 2m\omega}{\sin\omega} \text{ für } \omega = q\pi$$

findet man als wahren Werth des fraglichen Quotienten

$$\frac{2m\cos 2mq\pi}{\cos q\pi} = \frac{2m}{\cos\frac{k\pi}{m}}.$$

Nach Substitution dieses Werthes und wenn zur Abkürzung $\frac{2\pi}{m} = \vartheta$ gesetzt wird, ergiebt sich folgender Satz: je nachdem k ein Vielfaches von m ausmacht oder nicht, ist

$$1 + \cos k\vartheta + \cos 2k\vartheta + \cos 3k\vartheta + \cdots + \cos(m-1)k\vartheta = m \text{ oder } = 0.$$

Von der Summenformel

$$\sin\beta + \sin 2\beta + \sin 3\beta + \cdots + \sin(m-1)\beta$$
$$= \tfrac{1}{2}(1 - \cos m\beta)\cot\tfrac{1}{2}\beta - \tfrac{1}{2}\sin m\beta$$

ausgehend, findet man leicht für alle ganzen k und m

$$\sin k\vartheta + \sin 2k\vartheta + \sin 3k\vartheta + \cdots + \sin(m-1)k\vartheta = 0.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\cos\frac{2\pi}{m} + i\sin\frac{2\pi}{m} = \cos\vartheta + i\sin\vartheta = \varepsilon,$$

so erhält man mittelst des Vorigen den Satz: je nachdem k ein Vielfaches von m ausmacht oder nicht, ist

$$1 + \varepsilon^k + \varepsilon^{2k} + \cdots + \varepsilon^{(m-1)k} = m \text{ oder } = 0;$$

von diesem Satze lässt sich folgende Anwendung machen.

Wenn eine Gleichung von der Form

$$f(z) = C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + C_3 z^3 + \cdots$$

auch für complexe z gilt, so setze man darin nach einander

$$z = x, \quad \varepsilon x, \quad \varepsilon^2 x, \quad \varepsilon^3 x \ldots \varepsilon^{m-1} x$$

und addire alle entstehenden Gleichungen; dies giebt

$$f(x) + f(\varepsilon x) + f(\varepsilon^2 x) + \cdots + f(\varepsilon^{m-1} x)$$
$$= mC_0 + \cdots + C_k(1 + \varepsilon^k + \varepsilon^{2k} + \cdots + \varepsilon^{(m-1)k}) x^k + \cdots,$$

wo k die Werthe 1, 2, 3... erhält. Hier verschwinden nun alle Terme, in denen k kein Vielfaches von m ist, und daher bleibt

$$mC_0 + mC_m x^m + mC_{2m} x^{2m} + mC_{3m} x^{3m} + \cdots$$

Für die linke Seite bemerke man, dass ε, ε^2, ε^3, ... ε^{m-1} und $\varepsilon^m = 1$ die m Wurzeln der Gleichung $\eta = 1$ sind; bezeichnet man sie mit ε_1, ε_2, ... ε_m und schreibt nachträglich z statt x, so hat man die Gleichung

$$1) \qquad \frac{1}{m}\{f(\varepsilon_1 z) + f(\varepsilon_2 z) + \cdots + f(\varepsilon_m z)\}$$
$$= C_0 + C_m z^m + C_{2m} z^{2m} + C_{3m} z^{3m} + \cdots,$$

wobei die rechte Seite durch Auslassung von je $m - 1$ Termen der ursprünglichen Reihe gebildet ist.

1. Als erstes Beispiel diene die Gleichung

$$-\frac{l(1-z)}{z} = \tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{2}z + \tfrac{1}{3}z^2 + \tfrac{1}{4}z^3 + \cdots, \quad mod\, z < 1,$$

worin $C_n = \dfrac{1}{n+1}$ ist. Für $m = 3$ wird

$$-\tfrac{1}{3}\left\{\frac{l(1-\varepsilon_1 z)}{\varepsilon_1 z} + \frac{l(1-\varepsilon_2 z)}{\varepsilon_2 z} + \frac{l(1-\varepsilon_3 z)}{\varepsilon_3 z}\right\}$$
$$= \tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{4}z^3 + \tfrac{1}{7}z^6 + \tfrac{1}{10}z^9 + \tfrac{1}{13}z^{12} + \cdots$$

und nach völliger Ausrechnung ergiebt sich die Formel

$$2) \quad \tfrac{1}{3}\left\{l\left(\frac{1}{1-z}\right) + \tfrac{1}{2}l(1 + z + z^2) + \sqrt{3}\,.\, arc\tan\frac{z\sqrt{3}}{2+z}\right\}$$
$$= \tfrac{1}{1}z + \tfrac{1}{4}z^4 + \tfrac{1}{7}z^7 + \tfrac{1}{10}z^{10} + \cdots,$$

welche man durch Differentiation leicht verificiren kann.

2. Nimmt man wieder $m = 3$ und als Ausgangspunkt die Reihe

$$e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1\,.\,2} + \frac{z^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \cdots,$$

so erhält man

$$3) \qquad \tfrac{1}{3}\left\{e^z + 2e^{-\frac{1}{2}z}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}z\right)\right\}$$
$$= 1 + \frac{z^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{z^6}{1\,.\,2\ldots 6} + \frac{z^9}{1\,.\,2\ldots 9} + \cdots$$

Die Gleichung

$$\frac{e^z-1}{z}=\frac{1}{1}+\frac{z}{1.2}+\frac{z^2}{1.2.3}+\cdots$$

führt nach derselben Methode zu dem Resultate

$$4)\qquad \tfrac{1}{3}e^z-\tfrac{1}{3}e^{-\frac{1}{2}z}\left[\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}z\right)-\sqrt{3}\,.\,\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}z\right)\right]$$

$$=\frac{z}{1}+\frac{z^4}{1.2\ldots4}+\frac{z^7}{1.2\ldots7}+\frac{z^{10}}{1.2\ldots10}+\cdots;$$

endlich erhält man aus

$$\frac{e^z-1-z}{z^2}=\frac{1}{1.2}+\frac{z}{1.2.3}+\frac{z^2}{1.2.3.4}+\cdots$$

die Formel

$$5)\qquad \tfrac{1}{3}e^z-\tfrac{1}{3}e^{-\frac{1}{2}z}\left[\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}z\right)+\sqrt{3}\,.\,\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}z\right)\right]$$

$$=\frac{z^2}{1.2}+\frac{z^5}{1.2\ldots5}+\frac{z^8}{1.2\ldots8}+\frac{z^{11}}{1.2\ldots11}+\cdots$$

Lässt man in den Gleichungen 3, 4, 5, $-z$ an die Stelle von z treten, so kann man noch die Combination bilden

$$6)\qquad \tfrac{1}{3}e^{-z}+\tfrac{2}{3}e^{\frac{1}{2}z}\left\{\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}z\right)+\sqrt{3}\,.\,\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}z\right)\right\}$$

$$=1+\frac{z}{1}+\frac{z^2}{1.2}-\frac{z^3}{1.2.3}-\frac{z^4}{1.2\ldots4}-\frac{z^5}{1.2\ldots6}$$

$$+\frac{z^6}{1.2\ldots6}+\frac{z^7}{1.2\ldots7}+\frac{z^8}{1.2\ldots8}-\cdots,$$

wobei rechter Hand immer drei positive und drei negative Glieder aufeinander folgen.

Die Reihensummen in 3, 4 und 5 besitzen übrigens ähnliche Eigenschaften wie $\cos z$ und $\sin z$; werden nämlich jene Summen kurz mit $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$, $\varphi_3(z)$ bezeichnet, so gelten folgende Relationen

$$\varphi_1(z)=\frac{d\varphi_2(z)}{dz}=\frac{d^2\varphi_3(z)}{dz^2},$$

$$\varphi_2(z)=\frac{d\varphi_3(z)}{dz}=\frac{d^2\varphi_1(z)}{dz^2},$$

$$\varphi_3(z)=\frac{d\varphi_1(z)}{dz}=\frac{d^2\varphi_2(z)}{dz^2};$$

$$\varphi_1(x+y) = \varphi_1(x)\varphi_1(y) + \varphi_2(x)\varphi_3(y) + \varphi_3(x)\varphi_2(y),$$
$$\varphi_2(x+y) = \varphi_2(x)\varphi_2(y) + \varphi_3(x)\varphi_1(y) + \varphi_1(x)\varphi_3(y),$$
$$\varphi_3(x+y) = \varphi_3(x)\varphi_5(y) + \varphi_1(x)\varphi_2(y) + \varphi_2(x)\varphi_1(y),$$

aus denen sich leicht zahlreiche weitere Formeln ableiten lassen.

3. Geht man für $m = 3$ von den folgenden drei Gleichungen aus:

$$(1+z)^\mu = 1 + (\mu)_1 z + (\mu)_2 z^2 + (\mu)_3 z^3 + (\mu)_4 z^4 + \cdots,$$
$$\frac{(1+z)^\mu - 1}{z} = (\mu)_1 + (\mu)_2 z + (\mu)_3 z^2 + (\mu)_4 z^3 + \cdots,$$
$$\frac{(1+z)^\mu - 1 - \mu z}{z^2} = (\mu)_2 + (\mu)_3 z + (\mu)_4 z^2 + \cdots,$$

welche bei ganzen positiven μ ohne Einschränkung und bei anderen μ unter der gemeinschaftlichen Bedingung $mod\, z < 1$ gelten, und setzt man ferner zur Abkürzung

$$\sqrt{1 - z + z^2} = R, \quad arc\tan \frac{\sqrt{3}\,.\,z}{2-z} = \Theta,$$

so gelangt man zu den folgenden drei Formeln:

7)
$$\tfrac{1}{3}\{(1+z)^\mu + 2R^\mu \cos\mu\Theta\}$$
$$= (\mu)_0 + (\mu)_3 z^3 + (\mu)_6 z^6 + (\mu)_9 z^9 + \cdots,$$

8)
$$\tfrac{1}{3}\{(1+z)^\mu - R^\mu(\cos\mu\Theta - \sqrt{3}\,.\,\sin\mu\Theta)\}$$
$$= (\mu)_1 z + (\mu)_4 z^4 + (\mu)_7 z^7 + (\mu)_{10} z^{10} + \cdots,$$

9)
$$\tfrac{1}{3}\{(1+z)^\mu - R^\mu(\cos\mu\Theta + \sqrt{3}\,.\,\sin\mu\Theta)\}$$
$$= (\mu)_2 z^2 + (\mu)_5 z^5 + \mu_8 z^8 + (\mu)_{11} z^{11} + \cdots,$$

in denen für μ und z dieselben Bedingungen gelten, an welche der allgemeine binomische Satz geknüpft ist.

Bezeichnet man die gefundenen drei Reihensummen kurz mit

$$\psi_1(z, \mu), \quad \psi_2(z, \mu), \quad \psi_3(z, \mu),$$

so gelten folgende Relationen:

$$\psi_1(z, \mu) = \frac{1}{\mu+1} \cdot \frac{d\psi_2(z, \mu+1)}{dz},$$
$$\psi_2(z, \mu) = \frac{1}{\mu+1} \cdot \frac{d\psi_3(z, \mu+1)}{dz},$$
$$\psi_3(z, \mu) = \frac{1}{\mu+1} \cdot \frac{d\psi_1(z, \mu+1)}{dz}.$$

Lässt man $\frac{z}{\mu}$ an die Stelle von z treten und geht zur Grenze für unendlich wachsende μ über, so kommt man auf die in Nr. 2 entwickelten Formeln zurück.